ANTON DUMITRIU

SOLUȚIA PARADOXELOR LOGICO-MATEMATICE

Id scilicet efficiendum est, ut omnis paralogismus nihil aliud sit quam error calculi.

LEIBNIZ

ANTON DUMITRIU

SOLUŢIA PARADOXELOR LOGICO-MATEMATICE

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
București — 1966

PREFAȚĂ

La sfîrşitul secolului trecut, un matematician italian, Burali-Forti, descoperea o contradicție în teoria mulțimilor: cel mai mare număr ordinal nu este cel mai mare!

Acestui paradox i-au urmat altele: paradoxul lui Cantor (publicat postum de către Zermelo), paradoxul lui Russell, al lui Richard, al lui Zermelo, al lui Grelling-Nelson etc., şi, în sfîrşit, cel mai tulburător dintre toate, paradoxul lui Gödel.

Apariția antinomiilor în domeniul celor mai exacte şi riguroase ştiințe, matematicile, a acestor cazuri de teratologie matematică, după expresia lui Max. Winter, a zguduit atît fundamentul acestor ştiințe, cît şi al logicii şi a creat o criză într-o problemă foarte importantă a timpului nostru: problema fundamentelor matematicilor.

Ceea ce apare şi mai grav decît descoperirea acestor antinomii este poziția luată de matematicieni şi logicieni în această problemă şi care constă, în general, din a accepta o convenție mai mult sau mai puțin artificială, în baza căreia paradoxele pot fi evitate, nu soluționate: aşa-zisele soluții oferite pînă acum, inclusiv cea mai interesantă, teoria tipurilor, datorată lui Bertrand Russell, sînt toate convenționale, constînd din principii sau axiome restrictive ataşate arbitrar logicii clasice, şi care nu permit construcția unor expresii susceptibile să degenereze în contradicții. Cu aceasta însă, instrumentul logic îşi pierde caracterul şi sensul lui tradițional, fiind grevat de aceste convenții, devenind el însuşi o convenție. Față de poziția adoptată în problema antinomiilor, consecința aceasta era absolut fatală şi ea poate fi descifrată în toate soluțiile încercate de logicienii contemporani, deşi nu a fost afirmată totdeauna explicit în modul acesta. *In der Logik gibt es keine Moral*, va scrie Carnap, formulînd ,,principiul toleranței'', şi fiecare poate să-şi construiască logica sa cum vrea... O asemenea concepție reduce logica la un cadru simbolic, creat arbitrar, lipsit de un sens intrinsec, adică la foarte puțin, dacă nu chiar la nimic. Singurul caracter logic pe care îl mai are acest schematism simbolic este acela că nu e contradictoriu, dar necontradicția lui este construită în mod convențional, deci în ea însăşi nu are nici o valoare. Acceptarea antinomiilor logico-matematice ca fiind veritabile sau evitarea lor prin convenții de principiu

ruinează în mod esențial ideea de logică și o privează de orice semnificație epistemologică. În orice caz, speranța de a găsi bazele logice ale matematicii este, în condițiile acestea, pierdută.

Ceea ce se poate reproșa în primul rînd acelora care au acceptat antinomiile logico-matematice ca fiind veritabile este faptul că au fost mai mult matematicieni decît logicieni și s-au lăsat astfel influențați de metodele matematice — excelente, de altfel, la locul lor — , transformînd logica într-o teorie deductivă cu axiome particulare, susceptibile în acest caz să fie modificabile. Ideea aceasta nu a aparținut concepției clasice și de la Aristotel însuși, de-a lungul evului mediu, logicii i s-a rezervat un loc special în raport cu celelalte științe, ea fiind considerată ca „modul'' oricărei științe; ceea ce logicienii scolastici nu au încetat de a repeta mereu: *non posse esse scientiam id quod est omnis scientiae sive doctrinae modus* (nu poate fi o știință ceea ce este modul oricărei științe sau doctrine).

Această poziție a fost susținută și în timpul nostru, de celebrul logician Ludwig Wittgenstein, care în al său *Tractatus logico-philosophicus* a arătat că logica nu este o teorie convențională sau nominalistă, ci o reflectare a lumii: „*Die Logik ist keine Lehre sondern ein Spiegelbild der Welt*".

Este, de altfel, evident că logica nu se poate construi decît în mod aparent ca o teorie matematică, cu axiomele și metodele ei de deducție speciale. Într-adevăr, logica trebuie să justifice structura logică a oricărei teorii matematice, axiomele, regulile de deducție și teoremele oricărei teorii matematice; în caz că ea ar fi una din asemenea teorii matematice, ar trebui să justifice și propria ei structură logică, și axiomele, teoremele și regulile ei de deducție, adică ea ar justifica logic toate celelalte teorii matematice, dar o singură teorie matematică, aceea a logicii, ar trebui să se justifice prin ea însăși! Aceasta nu înseamnă altceva decît o justificare în cerc vicios.

Chiar dacă am fi obligați în fapt să acceptăm această situație, aceasta ar arăta că logica are o poziție cu totul specială printre celelalte teorii matematice, că ea nu este o teorie matematică ca oricare alta. Amintim numai această problemă aici, discuția ei rezervînd-o pentru altă lucrare.



Istoria filozofiei a mai înregistrat momente cînd au apărut astfel de probleme, de la subtilele argumente ale eleaților la naivele sofisme ale sofiștilor, de la rafinatele arguții ale megaricilor la pedantele exerciții de logică ale stoicilor, în sfîrșit, de la antinomiile lui Kant la paradoxele iraționaliștilor; toate aceste paradoxe au ilustrat însă o poziție particulară a unor gînditori sau a unor școli filozofice, dar nu au întrunit niciodată o unanimitate de voturi și nu au constituit concepția unei epoci. Considerarea paradoxului lui Gödel ca aparținînd inexorabil oricărui sistem logic formal (care conține aritmetica) arată că sîntem în prezența unui fenomen intelectual cu totul unic și surprinzător, care nu poate fi regăsit niciodată în trecut și de aceea apare ca fiind caracteristic epocii în care trăim și mentalității contemporane.

În această lucrare am pornit de la convingerea că inteligența omenească nu poate să-și făurească singură obstacole reale, că nu se poate delimita ea însăși, fără a comite prin aceasta un cerc vicios de principiu. Nu era acesta sensul afirmației lui Hegel că dacă cunoașterea și-ar trasa anumite limite aceasta ar însemna că am cunoaște mai mult decît ar permite-o aces-

te limite ? „Cunoaşterea existenţei unor asemenea limite — scria Hegel — conţine o contradicţie, căci dacă ştim ceva despre aceste limite, aceasta înseamnă că le-am şi depăşit''.

Am adoptat astfel poziţia clasică, poziţia lui Aristotel, exprimată clar în ultima carte a *Organon*-ului — Despre respingerile sofistice — după care orice problemă de felul acesta se reduce la o eroare de logică, şi credem că am reuşit să arătăm în mod pur logic în ce constă eroarea şi unde este exact locul ei în paradoxele logico-matematice.

Pentru aceasta am construit noi antinomii de un tip mai general, faţă de care paradoxele cunoscute nu sînt decît cazuri particulare ; am dilatat eroarea, ca să spunem aşa, pentru a o face vizibilă şi sesizabilă. Nu numai atît, dar am putut găsi schema generală după care se pot construi oricîte paradoxe voim. Vom observa că soluţia este unică şi nu necesită decît respectarea principiilor logicii clasice ; acestea fiind universale, respectarea lor nu poate duce la nici o limitare.

Soluţionarea problemei antinomiilor credem că prezintă, pe lîngă interesul de ordin teoretic, şi un altul : acela de a întări încrederea în raţiunea omenească şi în funcţia ei naturală, a cărei caracteristică necontestată este libertatea ei, adică puterea ei progresiv nelimitată.

A. D.

I

TEORIA CANTORIANĂ A MULȚIMILOR

Antinomiile logico-matematice au apărut mai întîi în cadrul teoriei mulțimilor, așa cum fusese creată de Georg Cantor. Deoarece în cele ce urmează, atît în formularea paradoxelor, cît și în soluționarea lor, intervin noțiuni din teoria mulțimilor, vom reaminti cîteva din ideile de bază ale acestei teorii, cu atît mai mult cu cît de la început se poate observa caracterul paradoxal al unora dintre aceste idei.

Cantor a acceptat și formulat unele dintre ideile teoriei sale pe baza intuiției directe, fără un control logic și matematic riguros. S-a crezut astfel că dificultățile ce s-au ivit pe parcursul dezvoltării ei s-ar datora tocmai unor definiții acceptate pe baza intuiției ca indiscutabile, cînd ele erau înșelătoare.

Teoria lui Cantor a fost numită, din cauza aceasta, *teoria naivă a mulțimilor*, ceea ce vrea să însemne o „teorie intuitivă".

După apariția antinomiilor, teoria mulțimilor a fost formulată cu multă grijă și construită pe alte baze logico-matematice, luînd forma unor „sisteme axiomatice".

Prin urmare, teoria mulțimilor poate fi înfățișată în două moduri: 1) ca o teorie intuitivă; 2) ca un sistem axiomatic.

În acest capitol vom vorbi despre teoria naivă a mulțimilor iar despre sistemele axiomatice ale teoriei mulțimilor vom vorbi în cap. IV, „Încercări de a găsi o solu-

ție", cînd vom considera sistemele axiomatice ale acestei teorii în raport cu problema soluționării paradoxelor. Dar chiar în teoria naivă a mulțimilor așa cum este expusă astăzi, unele dintre ideile lui Cantor au suferit modificări, după cum vom sublinia mai departe.

Noțiunea de mulțime. „O mulțime (*Menge*) — spune Cantor [1] — este o reuniune într-un întreg a unor obiecte bine determinate și distincte ale intuiției sau gîndirii noastre, care se numesc elementele mulțimii".

Deoarece cu această concepție despre mulțime s-a ajuns la paradoxe, matematicienii au considerat că este mai bine să nu se mai ia noțiunea de mulțime ca o noțiune definită, ci ca un element primar al intuiției noastre. Iată cum introduce mulțimea, de exemplu, W. Sierpinski [1], nemaispunînd nimic despre ce este o mulțime, ci dînd doar exemple de formare a unor mulțimi.

„*Mulțimi.* Cu obiecte date putem forma mulțimi. De exemplu, cu literele a, b, c putem face o mulțime a acestor litere".

Se notează pe scurt mulțimea formată cu niște obiecte date, cu acolade mici, între care se scriu obiectele respective despărțite prin virgule.

De exemplu, mulțimea formată cu literele a, b, c se scrie: {a, b, c}. Închizînd obiectele între aceste acolade am format o unitate închisă, un obiect nou, care este mulțimea acestor obiecte.

Elementele mulțimii. Obiectele cu care se formează o mulțime se numesc *elementele* mulțimii. Elementele mulțimii {a, b, c} sînt a, b și c; elementele mulțimii {1, 5, 7} sînt 1, 5 și 7 etc.

Dacă toate elementele unei mulțimi sînt date și le punem în evidență, atunci scrierea este aceea de mai sus cu acolade. Putem să notăm pe scurt mulțimile prin literele mari ale alfabetului: A, B, C, . . .

Apartenența. Pentru a exprima faptul că un element a aparține unei mulțimi M se întrebuințează simbolul „$\in$" de apartenență. Scrierea

$$a \in M$$

înseamnă: „a este un element al mulțimii M" sau, mai scurt, „a aparține lui M".

De exemplu, pentru mulţimea $M = \{1,7\}$ avem următoarele apartentenţe:

$$1 \in M$$
$$7 \in M$$

Reuniunea mulţimilor. Fie n mulţimi, M_1, M_2, M_3, ..., M_n ; cu elementele acestor mulţimi se poate forma o nouă mulţime R, astfel ca oricare element al lui R să aparţină cel puţin uneia dintre mulţimile date.

Mulţimea R se numeşte reuniunea mulţimilor M_1, M_2, M_3, ..., M_n. Simbolul de *reuniune* este „$\cup$". Avem deci

$$R = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_n$$

Intersecţia mulţimilor. Fie n mulţimi M_1, M_2, M_3, ..., M_n ; cu elementele acestor mulţimi se poate forma o nouă mulţime I, astfel ca elementele ei să aparţină în acelaşi timp fiecăreia dintre mulţimele date.

Mulţimea I se numeşte intersecţia mulţimilor M_1, M_2, M_3, ..., M_n. Simbolul de intersecţie este „$\cap$". Avem deci

$$I = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_n$$

Diferenţa a două mulţimi. Mulţimea D a tuturor elementelor unei mulţimi M_1 care nu aparţin unei alte mulţimi M_2 se numeşte *diferenţa* mulţimilor date. *Diferenţa* mulţimilor M_1 şi M_2 se notează cu semnul „—". Avem deci:

$$D = M_1 - M_2$$

Mulţimea cu un singur element. Am spus că formînd o mulţime cu anumite obiecte, am construit un nou obiect care este complet distinct de obiectele iniţiale. Acest lucru se poate vedea mai bine examinînd mulţimea cu un singur element. Fie elementul a; atunci mulţimea formată numai cu a este $\{a\}$. Elementul a aparţine mulţimii $\{a\}$:

$$a \in \{a\}$$

Dar nu putem scrie $a \in a$, fiindcă aceasta nu are nici un sens: nu putem spune că elementul a îşi aparţine lui însuşi ca element.

Mulțimea vidă. Adesea se vorbește de mulțimea elementelor care satisfac o anumită condiție. Se poate întîmpla să nu existe nici un element care să satisfacă această condiție. Se spune atunci că mulțimea respectivă este vidă. De exemplu, mulțimea tuturor numerelor raționale x care satisfac ecuația $x^2 = 2$ este vidă.

Unii autori notează mulțimea vidă cu simbolul Λ.

Egalitatea mulțimilor. Două mulțimi sînt *egale* dacă fiecare element al uneia din mulțimi este un element al celeilalte mulțimi și invers. Scriem că două mulțimi M și N sînt egale, astfel: $M = N$.

De exemplu, avem egalitatea următoare între mulțimi cu elemente date:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{c, b, a\} = \{a, b, c, a\}$$

Aici avem patru moduri diferite de a scrie aceeași mulțime.

Din această definiție a egalității mulțimilor rezultă că dacă două mulțimi M și N sînt vide, ele sînt egale: $M = N$. De unde putem trage concluzia că nu există decît o singură mulțime vidă.

Mulțimi de mulțimi. Se pot forma mulțimi de obiecte care sînt ele însele mulțimi. De exemplu, să considerăm obiectele a, b, c, d și e. Putem forma cu ele mai multe mulțimi; fie, de exemplu, următoarele două:

$$P = \{a, b\}$$
$$Q = \{c, d, e\}$$

Luînd aceste două mulțimi P și Q ca elemente putem să formăm o nouă mulțime Z:

$$Z = \{P, Q\} = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$$

Mulțimea Z are deci două elemente, P și Q. Această mulțime Z trebuie deosebită de mulțimea formată cu toate elementele a, b, c, d și e.

$$T = \{a, b, c, d, e\}$$

Elementele mulțimii Z sînt mulțimi, iar elementele mulțimii T sînt obiecte. Mulțimea T are cinci elemente, pe cînd

mulţimea Z are numai două. Nici un element al mulţimii T nu este element al mulţimii Z (cu toate că elementele mulţimii T sînt elemente ale elementelor mulţimii Z). Numai în anumite cazuri particulare un element al unui element al unei mulţimi date poate fi un element al acestei mulţimi. De exemplu, mulţimea

$$\{a, \{a, b\}\}$$

are un element al unui element al său.

Submulţimea unei mulţimi. Dacă fiecare element al unei mulţimi M este de asemenea un element al unei alte mulţimi N, se spune că M este o submulţime a mulţimii N. Se spune atunci că mulţimea M este *inclusă* în N. Din această definiţie urmează că orice mulţime este o submulţime a ei înseşi sau este inclusă în ea înseşi. Mulţimea vidă este o submulţime a oricărei mulţimi.

Rezultă că mulţimea vidă are şi ea o singură submulţime: mulţimea vidă.

Relaţia de *incluziune* (de submulţime) dintre o mulţime M şi o altă mulţime N se notează cu semnul „ $\subset$ ”. Deci

$$M \subset N$$

înseamnă: „mulţimea M este inclusă în mulţimea N”; M este o submulţime a mulţimii N.

Vom mai observa că se pot construi mulţimi care să aibă unele din elementele lor ca submulţimi. De exemplu, fie mulţimea $B = \{a\}$ şi mulţimea $A = \{a, \{a\}\}$. Se pot da multe exemple de felul acesta.

Iată un exemplu de mulţime non-vidă ale cărei elemente sînt toate submulţimile ei. Fie mulţimea $Z = \{\Lambda\}$, unde Λ, după cum am spus, este mulţimea vidă. Ea are un singur element care este şi submulţime; mulţimea $T = \{\Lambda, \{\Lambda\}\}$ are două elemente, care, fiind mulţimea vidă, sînt şi submulţimi ale lui T. Tot aşa se pot forma:

$$U = \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}\}$$

$$V = \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\}$$

etc.

Mulțimi finite și infinite. O mulțime M se numește finită dacă există un întreg pozitiv n astfel ca M să aibă exact n elemente. O mulțime care nu este finită se numește *infinită*. Mulțimea vidă este deci finită. Exemplul cel mai simplu de muțime infinită este mulțimea numerelor naturale: 1, 2, 3, 4, ..., n, ...

Echivalența. Dacă elementele unei mulțimi M pot fi puse într-o *corespondență biunivocă* cu elementele unei alte mulțimi, astfel ca fiecărui element din M să-i corespundă un singur și numai un element din N și invers, cele două mulțimi se numesc *echivalente*.

Semnul de echivalență este „ ~ " și deci echivalența mulțimilor M și N se scrie M ~ N.

Mulțimea complementară. Dacă o mulțime M este o submulțime a mulțimii N, adică dacă M ⊂ N, atunci mulțimea diferență a acestor mulțimi M—N se numește complementul lui M în raport cu mulțimea N și se notează cu CM.

Model. Funcție. Dacă printr-un procedeu oarecare se face să corespundă fiecărui element a al unei mulțimi M un singur obiect nou φ(a), această corespondență se va numi o *funcție*, iar mulțimea M, domeniul de definiție al funcției. Dacă noile obiecte φ(a) aparțin toate unei mulțimi N, atunci ordonarea a → φ(a) se mai numește un model al lui M în N. Dacă toate elementele mulțimii N sînt întrebuințate fiecare cel puțin o dată, atunci mulțimea N se numește mulțimea model a funcției φ.

Dacă fiecărui element al mulțimii M îi corespunde un singur element și numai unul singur din mulțimea N și invers, avem în cazul aceasta modele inverse. Se vede dar că două mulțimi care pot fi puse în această corespondență biunivocă, încît una din ele devine modelul celeilalte, sînt mulțimi echivalente.

De exemplu, se poate face să corespundă oricărui număr natural n numărul par 2n.

În modul acesta s-a constituit modelul mulțimii tuturor numerelor naturale pe mulțimea tuturor numerelor pare. Deoarece corespondența este biunivocă, mulțimea numerelor naturale este de asemenea un model al mulțimii numerelor pare. Cele două mulțimi considerate sînt echivalente.

Iată această corespondenţă biunivocă între elementele mulţimii numerelor naturale şi mulţimea numerelor pare (mulţimi echivalente):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n \ \ldots\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & \ldots\ldots & 2n \ \ldots\ldots \end{array}$$

Mulţimi numerabile. O mulţime M care este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale se numeşte o *mulţime numerabilă*. Această definiţie înseamnă: mulţimea M este numerabilă dacă putem să facem o corespondenţă biunivocă între elementele mulţimii M şi numerele naturale. Cu alte cuvinte, putem să dăm indici elementelor lui M, oricare element al lui M avînd indicele său şi elemente diferite avînd indici diferiţi. Dacă indicele unui element este n, notăm acest element cu a_n. Mulţimea numerabilă M se poate scrie atunci:

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

De aici rezultă că orice mulţime finită este numerabilă; numai mulţimi infinite pot fi nenumerabile.

Un exemplu de mulţime nenumerabilă: mulţimea tuturor numerelor reale cuprinse între 1 şi 2 etc.

Mulţime ordonată. O mulţime se numeşte *simplu ordonată*, dacă elementele ei au fost aranjate într-o ordine, după un criteriu oarecare, aşa ca: 1) dintre două elemente oarecare a_1 şi a_2 să avem sau $a_1 < a_2$ sau $a_2 < a_1$, sau $a_1 = a_2$; 2) relaţiile $a_1 < a_2$ sau $a_2 < a_1$, sau $a_1 = a_2$, să se excludă reciproc; 3) din $a_1 < a_2$ şi $a_2 < a_3$ să urmeze $a_1 < a_3$.

Relaţia $a_1 < a_2$ nu necesită neapărat o relaţie reală între mărimi; este vorba de anterioritatea unuia din elemente faţă de celelalte.

O mulţime se numeşte *bine ordonată* în cazul în care, fiind ordonată, există şi un element iniţial, fie al mulţimii însăşi, fie al oricărei submulţimi non-vide.

Exemplu: orice mulţime finită ordonată este bine ordonată; şirul numerelor naturale 1, 2, 3, ..., n, ... este bine ordonat, fiindcă în oricare submulţime non-vidă există un prim element; mulţimea tuturor numerelor întregi algebrice: ..., —2, —1, 0, 1, 2, ..., ordonată în ordine naturală, nu este bine ordonată.

Postulatul alegerii și teorema de bine ordonare. Vom mai cita aici două propoziții datorite lui Zermelo, și care au provocat o discuție amplă în epoca noastră.

Zermelo a observat primul că multe raționamente matematice se bazează pe o presupunere acceptată implicit și pe care el a enunțat-o explicit astfel, denumind-o *postulatul alegerii*:

„Pentru orice mulțime de mulțimi non-vide și neavînd nici un element comun există o *funcție de alegere* (*Auswahlfunktion*), cu ajutorul căreia se obține o submulțime care conține cel puțin un singur element al fiecărei submulțimi".

Acest postulat a fost enunțat în diverse variante.

Cea mai importantă consecință a acestui postulat este teorema de *bine ordonare* a lui Zermelo: „oricare mulțime M poate fi bine ordonată".

S-au dat pentru această teoremă mai multe demonstrații; Zermelo însuși a dat două demonstrații.

Putere sau număr cardinal. „Vom numi *putere* sau *număr cardinal* al unei mulțimi M — scrie Cantor — noțiunea generală pe care o deducem din M cu ajutorul facultății noastre de a gîndi, făcînd abstracție de natura diferitelor elemente ale lui M și de ordinea lor".

Definiția aceasta a fost abandonată chiar în teoria naivă a mulțimilor. Iată ce scrie Fraenkel ([4], p. 59):

„Desigur, formularea lui Cantor nu poate fi acceptată ca o *definiție* a numerelor cardinale". Și iată definiția pe care o citează Fraenkel și care este, în fond, aceea acceptată astăzi:

„Numărul cardinal (puterea) al unei mulțimi M este mulțimea tuturor mulțimilor care sînt echivalente cu M".

Ceea ce este necorect în această definiție nu putea să scape lui Fraenkel, căci el adaugă: „Această definiție pare întrucîtva paradoxală. Totuși, astfel de definiții sînt astăzi lucruri naturale în matematici". Și Fraenkel mai observă încă: „Pe de altă parte, mulțimea tuturor mulțimilor echivalente cu M poate să implice antinomii dacă nu sînt luate anumite precauții".

Vom vedea mai departe care sînt aceste antinomii. Vom spune însă de pe acum că exigențele unui logician nu sînt satisfăcute în aceste definiții „naive" și Fraenkel însuși recunoaște acest lucru [4].

Din definiţia de mai sus rezultă:

„Mulţimile M_1 şi M_2 vor avea acelaşi număr cardinal dacă sînt echivalente, adică dacă $M_1 \sim M_2$. Altfel, numerele lor cardinale sînt *diferite*".

Vom mai menţiona faimoasa teoremă a lui Cantor asupra numărului cardinal al mulţimii formate cu submulţimile unei submulţimi date:

„Mulţimea tuturor submulţimilor oricărei mulţimi date M are o putere (număr cardinal) mai mare decît mulţimea M".

Şi aici matematicienii au observat că s-a introdus ceva neclar, fiindcă Zermelo a fost obligat să introducă o axiomă de existenţă, şi anume:

„Mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi date M există".

Noi vom arăta în capitolul ultim al acestei lucrări („Concluzii") în ce constă eroarea de logică pe care o cuprind implicit astfel de propoziţii.

Cu noţiunile iniţiale, Cantor a putut să explice, într-un mod foarte general operaţiile cu numere întregi: adunare, înmulţire, ridicare la putere, comparaţie etc.

Numerele cardinale transfinite. Trebuie să spunem că ideea iniţială de la care a pornit Cantor în elaborarea teoriei sale — care a luat pe parcursul dezvoltării ei un aspect mult mai vast şi complex — a fost lămurirea ideii de infinit în matematici, care la epoca cînd scria Cantor era o idee destul de controversată.

Am văzut ce numeşte Cantor putere sau număr cardinal. Ea avea avantajul unei intuiţii „naive" şi nu constituia o definiţie vicioasă. Definiţia numărului cardinal ca mulţime de mulţimi echivalente apare oricui bizară şi în orice caz artificială şi noi vom arăta pentru ce (în capitolul final).

Numărul 1 va fi mulţimea tuturor mulţimilor cu un singur element (mulţimi echivalente între ele); numărul 2 va fi mulţimea tuturor mulţimilor cu două elemente fiecare; etc.

Şirul numerelor naturale sînt dar puterile mulţimilor finite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.,\ n,\ \ldots$$

Să considerăm mulţimea formată din toate numerele cardinale (deci o mulţime de mulţimi); puterea acestei mulţimi infinite, care este bine definită, este notată de Cantor cu $\aleph_0$ (Aleph zero): este primul *număr transfinit* sau cel mai mic *cardinal transfinit.*

Numărul cardinal transfinit $\aleph_0$ se bucură de următoarele proprietăţi, a fiind un număr finit:

$$\aleph_0 > a$$
$$\aleph_0 + a = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$a \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

Cu ajutorul exponenţialelor se pot defini alte numere transfinite, puteri ale unor mulţimi mult mai vaste decît aceea a numerelor naturale şi astfel Cantor crede că poate gîndi o serie de numere cardinale transfinite, distincte între ele, seria Aleph-ilor:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

Numere ordinale. Să introducem acum noţiunea de număr ordinal. Am văzut ce înseamnă ordonarea simplă a unei mulţimi M. Cantor defineşte astfel *tipul ordinal*: „este noţiunea generală care rezultă din M cînd facem abstracţie de natura elementelor lui M, dar nu şi de ordinea lor de succesiune".

Astăzi, tot în cadrul teoriei naive a mulţimilor, această definiţie este înlocuită prin alta. Se introduce mai întîi ideea de *asemănare* între mulţimi. Două mulţimi echivalente se numesc *asemenea,* dacă elementele lor corespund în mod biunivoc şi în ordinea fiecăruia dintre ele. În acest caz şi numai în acest caz, ele au şi aceeaşi putere şi acelaşi tip ordinal.

Tipurile ordinale ale mulţimilor finite sînt numerele ordinale finite; ele sînt egale cu numerele cardinale finite respective.

Dacă considerăm însă mulţimile infinite, problema nu mai este atît de simplă. De exemplu, puterea mulţimii numerelor naturale este $\aleph_0$, dar aceasta este şi puterea

numerelor raţionale, fiindcă se poate stabili o corespondenţă biunivocă între numerele întregi şi numerele raţionale inferioare lui 1. Cu alte cuvinte, mulţimile infinite de aceeaşi putere pot avea tipuri ordinale diferite.

Să considerăm un exemplu. Numerele raţionale de forma $\frac{p}{q}$ pot fi ordonate după mărime, de exemplu, după valoarea sumei termenilor $p + q$; într-o altă ordonare putem să le aranjăm în ordinea mărimii lor crescătoare etc. Primul mod de ordonare al numerelor raţionale ne dă seria:

$$\ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Ordinea în care sînt aranjate numerele raţionale în mulţimea numerelor raţionale defineşte un tip ordinal, notat de Cantor cu ω.

Al doilea mod de ordonare defineşte însă, după Cantor, un alt număr ordinal, notat de el cu η. Cele două tipuri ordinale diferă unul de altul. Nu vom urmări această chestiune mai departe, dar se vede că tipul ordinal al unei mulţimi infinite depinde de ordonarea ei.

*

Am citat doar cîteva din noţiunile de bază ale teoriei mulţimilor, numai atît cît poate să aibă o legătură cu problema paradoxelor logico-matematice. În faţa contradicţiilor provocate de ideile „naive" ale teoriei mulţimilor, matematicienii nu au tras concluzia că asemenea idei trebuiau cu necesitate să conţină germenul paradoxelor, ci „că trebuie luate anumite precauţii", anumite „măsuri de pază". Aceste măsuri nu sînt impuse, în general, decît de temerea de a nu da peste contradicţii. Iată, de exemplu, ce scrie van der Waerden ([1], p. 3): „Ne păzim totuşi să alcătuim noţiuni ca «mulţimea tuturor mulţimilor» şi altele de acelaşi fel, fiindcă acestea dau loc la contradicţii".

Matematicienii şi-au dat seama că oricît ar încerca să distileze noţiunea de „mulţime", ea nu poate forma o bază sigură pentru construcţia teoriei mulţimilor, teorie la care totuşi nu se poate renunţa, date fiind cele mai multe din rezultatele ei indiscutabile.

Iată ce scrie Fraenkel ([5], p. 19):

„Antinomiile arată că conceptul naiv de mulţime, după cum apare în « definiţia » lui Cantor, şi cele mai generale concluzii derivabile din el nu pot forma o bază satisfăcătoare pentru teoria mulţimilor şi mult mai puţin pentru matematici în întregul lor".

Vom vorbi mai departe despre aceste „antinomii" şi despre „sistemele axiomatice" care au fost construite ca un remediu şi o reconstituire a teoriei mulţimilor pe baze strict logico-matematice. Din primul moment (adică începînd cu Zermelo, 1908), noţiunea de mulţime a fost supusă unor restricţii axiomatice, unor delimitări matematice riguroase, aşa că pînă la sfîrşit nici nu se mai ştie dacă ceea ce numim mulţime mai este totuşi o mulţime. Într-adevăr, pentru a da un exemplu numai, în sensul acesta, iată ce scrie Bourbaki ([1], p. 60) despre mulţime:

„Din punctul de vedere naiv, multe entităţi matematice pot fi considerate colecţii sau mulţimi de obiecte. Noi nu vom căuta să formalizăm această noţiune şi, în interpretarea formalistă a ceea ce urmează, cuvîntul « mulţime » trebuie considerat ca riguros sinonim cu « termen »; în particular, fraze ca « fie X o mulţime » sînt, în principiu, total superflue, pentru că orice literă este un termen".

Cu alte cuvinte, mulţimea este o literă sau un termen care se supune unor anumite reguli de calcul...

II

ELEMENTE DE LOGISTICĂ

În cursul lucrării noastre vom avea nevoie de cîteva noţiuni elementare de logică matematică, pe care ne vom permite să le prezentăm cititorului. Menţionăm că nu facem o expunere sau o introducere în logica matematică, ci numai o prezentare simplificată a cîtorva capitole din această disciplină, şi anume: 1) calculul propoziţiilor; 2) funcţii propoziţionale; 3) calculul claselor.

Vom reduce această expunere la ceea ce este strict necesar în dezvoltarea studiului nostru, urmărind în general, sistemul lui Russell din *Principia Mathematica*.

1. Calculul propoziţional

Constante şi variabile. Logica matematică sau logica simbolică sau logistica utilizează, în locul cuvintelor şi propoziţiilor care se pot forma cu ele, semne. Unele semne pot reprezenta ceva determinat, cînd ele se numesc „constante", şi alteori, ceva nedeterminat, în care caz se numesc „variabile".

Variabile propoziţionale. În calculul propoziţional, propoziţiile sînt considerate ca unităţi, fără să ne intereseze conţinutul eventual pe care ele l-ar putea avea. Ele se notează pe scurt cu litere: p, q, r, ..., care se numesc variabile propoziţionale. Aceste variabile pot lua două valori: adevărul (notat pe scurt A) şi falsul (F), care se numesc valori de adevăr.

Funcții de adevăr. Cu variabilele propoziționale se pot forma complexe logice, în care propozițiile p, q, r, ... sînt legate prin *constante logice*, corespunzătoare conjuncțiilor din vorbirea obișnuită și cu care se formează fraze. De exemplu, compusul logic „p sau q" înseamnă: sau prima propoziție este adevărată, sau a doua, sau amîndouă. Cum în logica formalizată, variabilele p și q pot să ia două valori fiecare, A și F, adevărul sau falsitatea expresiei compuse „p sau q" nu depinde decît de adevărul sau falsitatea variabilelor componente. După definiție, „p sau q" este adevărată dacă cel puțin una dintre variabile este adevărată, deci putem avea următoarele patru posibilități, cum arată tabelul de mai jos:

	p	q	„p sau q"
1.	A	A	A
2.	F	A	A
3.	A	F	A
4.	F	F	F

Se vede că putem determina adevărul sau falsitatea expresiei „p sau q" numai în funcție de adevărul sau falsitatea variabilelor p și q. Valoarea de adevăr a expresiei „p sau q" nu depinde de conținutul propozițiilor p și q, ci numai de valoarea lor de adevăr; de aceea, expresia „p sau q" se numește o *funcție de adevăr.* În același mod se pot construi expresii mai complicate sau mai simple, în care variabilele p, q, r, ... vor fi unite prin conjuncții diferite — constante logice — și ele vor fi toate *funcții de adevăr.*

Semnul de definiție este simbolizat prin „=", în dreptul căruia se pune „Def." (sau „$=_{Df}$"). Expresia din dreapta semnului de definiție se numește *definiens* și expresia din stînga, *definiendum.*

Carnap ([3], p. 7) spune că definițiile servesc numai pentru abrevieri și nu sînt principial necesare. Vom discuta afirmația aceasta mai departe.

Punctuația. Pentru a despărți diversele părți ale unei expresii logice formale se întrebuințează un punct, două puncte, trei puncte etc. Puterea unui punct se întinde pînă

unde intervine un număr de puncte egal sau mai mare. Se pot întrebuința, de asemenea, paranteze în locul punctelor.

Cîteva funcții de adevăr. Vom introduce acum cîteva funcții de adevăr de care vom avea nevoie în construirea calculului propozițional.

a) N e g a ț i a este simbolizată de semnul „~", care — pus în fața unei variabile propoziționale — îi schimbă valoarea de adevăr: ~ p se citește „non-p".

Propoziția p putînd lua două valori, A și F, avem următorul tabel, care arată valorile corespunzătoare pentru ~p față de p:

p	~p
A	F
F	A

b) D i s j u n c ț i a l o g i c ă este aceea deja menționată mai sus: „p sau q". Simbolul pentru constanta logică „sau" este semnul „v". Tabelul a aratat că funcția de adevăr „p v q", disjuncția logică, este falsă numai în cazul cînd ambele variabile sînt false.

c) C o n j u n c ț i a l o g i c ă „p și q" este o funcție de adevăr care este adevărată dacă p și q sînt simultan adevărate; deci dacă cel puțin una dintre ele este falsă, ,.p și q" este falsă. Simbolul constantei logice „și" este un punct, „.". Deci „p.q". înseamnă „p și q". (Conjuncția „și" se mai notează cu semnul „&".)

Tabelul următor arată cum corespund valorile lui „p.q" în raport cu valorile de adevăr ale variabilelor p și q:

	p	q	p . q
1.	A	A	A
2.	F	A	F
3.	A	F	F
4.	F	F	F

d) I m p l i c a ț i a l o g i c ă este definită de Russell ca fiind o funcție de adevăr care este adevărată dacă sau prima propoziție este falsă, sau a doua este adevărată. Cu alte cuvinte, dacă p implică q, nu poate fi cazul ca prima

să fie adevărată şi a doua falsă: o propoziţie adevărată nu poate implica una falsă. Semnul de implicaţie este „$\supset$" şi deci „p implică q" se scrie: $p \supset q$.

Conform definiţiei lui Russell, avem:

$$p \supset q . = . \sim p \vee q \quad \text{Def.}$$

Implicaţia este definită cu ajutorul negaţiei şi al disjuncţiei logice. Tabelul corespunzător este:

	p	q	$p \supset q$
1.	A	A	A
2.	F	A	A
3.	A	F	F
4.	F	F	A

e) Echivalenţa logică. Dacă două propoziţii p şi q sînt simultan adevărate sau simultan false ele se numesc echivalente. Simbolul de echivalenţă este „$\equiv$" şi deci „p echivalent cu q" se scrie: $p \equiv q$. Russell a arătat că această definiţie nu înseamnă altceva decît că $p \supset q$ şi în acelaşi timp $q \supset p$, adică cele două propoziţii echivalente se implică simultan reciproc:

$$p \equiv q . =_{Df} : p \supset q . q \supset p$$

Tabelul următor arată valorile de adevăr ale echivalenţei în funcţie de valorile de adevăr ale argumentelor:

	p	q	$p \equiv q$
1.	A	A	A
2.	F	A	F
3.	A	F	F
4.	F	F	A

Se pot construi mai multe funcţii de adevăr cu două argumente. Cîte? Wittgenstein [1] a arătat că se pot construi $2^{2^2} = 16$ asemenea funcţii, dar nu toate sînt independente, ci unele se pot exprima cu ajutorul celorlalte. Am şi văzut că implicaţia şi echivalenţa se pot defini cu ajutorul celorlalte.

Tautologia. Există anumite funcţii de adevăr care rămîn în permanenţă adevărate, al căror adevăr nu depinde deci nici de conţinutul ce s-ar atribui variabilelor componente şi nici de valoarea lor de adevăr.

Asemenea expresii se numesc tautologii, după denumirea dată de Wittgenstein. De exemplu, expresia

$$\sim p \vee p$$

spune: sau p este fals, sau p este adevărat, care este principiul terţului exclus. Un tabel ne arată că orice valoare de adevăr ar lua variabila p, expresia $\sim p \vee p$ rămîne adevărată totdeauna, fiindcă una din propoziţii va fi sigur adevărată:

p	~p	~p v p
A	F	A
F	A	A

În acelaşi mod, expresia următoare este o tautologie:

$$q \,.\supset .\, p \vee q$$

Orice propoziţie q implică disjuncţia $p \vee q$. Tabelul ne arată imediat că această formulă logică rămîne în permanenţă adevărată, orice valoare de adevăr ar lua propoziţiile componente (şi orice conţinut):

	p	q	p v q	q.⊃.p v q
1.	A	A	A	A
2.	F	A	A	A
3.	A	F	A	A
4.	F	F	F	A

Formula considerată este deci o tautologie.

Un alt caz extrem al funcţiilor de adevăr sînt *contradicţiile*.

Există expresii logice care rămîn în permanenţă false, orice valori de adevăr ar lua variabilele componente (şi deci orice conţinut).

De exemplu, formula

$$\sim p \,.\, p$$

este o contradicţie, adică o propoziţie falsă totdeauna, cazul opus tautologiei. Tabelul ne arată imediat acest lucru:

p	~p	~p . p
A	F	F
F	A	F

Oricare ar fi valoarea de adevăr a lui p, ~p . p este falsă. În acelaşi mod se pot construi o mulţime de contradicţii.

Semnul de aserţiune. O propoziţie poate fi numai considerată sau afirmată. De exemplu, propoziţia „Cezar a trecut Rubiconul" este o propoziţie considerată. Dacă însă spunem: „propoziţia «Cezar a trecut Rubiconul» este adevărată", atunci am afirmat această propoziţie. Semnul de aserţiune, introdus numai pentru această distincţie, este „⊢". În formulele logice, propoziţiile sînt numai considerate, fiindcă ele pot fi adevărate sau false. De exemplu,

$$\vdash \,.\, p \supset q$$

înseamnă: este adevărat că p implică q, dar p şi q pot să fie adevărate sau false; nu ele sînt afirmate, ci implicaţia lor. Semnul de aserţiune nu este un simbol logic necesar; noi îl vom păstra însă pentru mai multă precizie.

Reguli de deducţie. Regulile de deducţie (de care ne vom servi aici) sînt în număr de trei:

a) Regula substituţiei: în orice formulă logică adevărată (tautologie) se pot substitui în locul variabilelor orice alte expresii propoziţionale, cu condiţia ca o variabilă să fie înlocuită pretutindeni în formulă cu aceeaşi expresie simbolică, şi se obţine tot o tautologie.

b) Regula modus ponens: dacă o implicaţie este adevărată şi primul ei membru este adevărat, atunci şi al

doilea membru al implicației este adevărat (conform definiției implicației). Simbolic se scrie această regulă astfel:

$$\vdash \cdot p \supset q$$
$$\vdash \cdot p$$
$$\overline{\vdash \cdot q}$$

c) Regula de înlocuire (*Rule of Replacement*): în orice formulă adevărată (tautologie) o expresie propozițională poate fi înlocuită printr-o altă expresie propozițională dacă ultima expresie este echivalentă cu prima. Această regulă are asupra regulii substituției avantajul că nu este necesar ca expresia nouă, care este substituită celei vechi în tautologie, să fie substituită pretutindeni în formula adevărată; însă ea cere o condiție în plus, și anume ca mai întîi să se stabilească echivalența acestei expresii cu aceea pe care o înlocuiește, ceea ce nu se cere în regula substituției.

Construcția logicii formale. Pentru a construi teoria logicii formale, ca o teorie deductivă matematică, Russell a avut nevoie de noțiunile primitive (nedefinite) de variabilă propozițională, de negație, „∼" și de disjuncție „v". Luînd apoi un grup de cinci axiome, care sînt tautologii, el izbutește să deducă cu ajutorul regulilor de deducție, din ele, teoremele logicii. Nicod [1] a arătat că se poate reduce numărul propozițiilor primitive la patru, ba chiar că se poate reduce la una singură (însă incomodă). Iată cele patru axiome ale sistemului lui Russell, date de Nicod:

A1 $\vdash : q \cdot \supset \cdot p \vee q$

A2 $\vdash : p \vee p \cdot \supset \cdot p$

A3 $\vdash : p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$

A4 $\vdash : \cdot q \vee r \cdot \supset : p \vee q \cdot \supset \cdot p \vee r$

Se poate constata că toate patru axiomele sînt tautologii făcînd tabelul respectiv pentru fiecare, ca mai sus.

Din acestea se deduc tautologii mai mult sau mai puțin complicate. Nu este cazul să menționăm aici decît că princi-

piile logicii clasice devin în logica lui Russell teoreme demonstrate (tautologii). Iată aceste principii, precum şi cîteva dintre aceste teoreme:

T1	$\vdash \cdot \sim p \vee p$	(principiul terţului exclus)
T2	$\vdash \cdot \sim (p \cdot \sim p)$	(principiul contradicţiei)
T3	$\vdash \cdot \sim (\sim p) \equiv p$	(principiul dublei negaţii)
T4	$\vdash :. p \supset q \cdot q \supset r : \supset : p \supset r$	(principiul silogismului)
T5	$\vdash : p \supset q \cdot \supset \cdot \sim q \supset \sim p$	(principiul transpoziţiei)
T6	$\vdash : p \supset \sim p \cdot \supset \cdot \sim p$	(principiul *reductio ad absurdum*)
T7	$\vdash : p \vee p \cdot \equiv \cdot p$	(principiul tautologiei)
T8	$\vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot \sim (p \equiv \sim q)$	
T9	$\vdash : p \equiv q \cdot \equiv : p \cdot q \vee \sim p \cdot \sim q$	
T10	$\vdash \cdot \sim (p \equiv \sim p)$	

2. Funcţii propoziţionale

În paragraful precedent am considerat propoziţiile ca unităţi şi ceea ce ne-a interesat au fost relaţiile dintre propoziţii realizate prin aşa-numitele „constante logice".

Să intrăm acum în structura unei astfel de propoziţii. Fie, de exemplu, propoziţia „Socrate este muritor". Aici se distinge un subiect care are un predicat sau, mai general spus, un individ care are o proprietate. Vom exprima lucrul acesta, în mod foarte general, astfel: fie un obiect x (variabil) care are o proprietate f, adică „x este f". Cînd înlocuim variabila x cu valori date x = Socrate, x = Platon, x = = Aristotel etc., iar f = muritor, obţinem propoziţiile: „Socrate este muritor", „Platon este muritor", „Aristotel este muritor" etc., adică pentru fiecare valoare dată a lui x şi pentru f dat, se obţine o propoziţie (adevărată sau falsă). Expresia „x este muritor" sau, mai general, „x este

f", care devine pentru fiecare valoare dată a variabilei o propoziţie, se numeşte o *funcţie propoziţională.*

Russell [2] defineşte funcţia propoziţională astfel: „O funcţie propoziţională este o expresie conţinînd unul sau mai mulţi constituenţi nedeterminaţi, aşa că atunci cînd valorile lor sînt date, expresia devine o propoziţie". Funcţia propoziţională „x este f" se notează pe scurt ca în matematică cu f(x). Variabila x se numeşte argumentul funcţiei. Totalitatea valorilor care, puse în locul lui x (de exemplu, cum a fost în cazul precedent, Socrate, Platon, Aristotel...), fac să se transforme funcţia propoziţională într-o propoziţie se numeşte domeniul de valori ale argumentului.

În rezumat: o propoziţie este o expresie care este adevărată sau falsă; o funcţie propoziţională este o expresie conţinînd variabile şi care, pentru valori determinate ale variabilelor, devine o propoziţie (adevărată sau falsă).

În ceea ce urmează nu vom avea nevoie decît de funcţii propoziţionale cu un singur argument, de forma f(x).

Dacă funcţia propoziţională este dată, cum a fost „x este muritor", atunci se întrebuinţează în mod obişnuit litere latine pentru scrierea lor:

$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ \ldots$$

Dacă funcţia propoziţională este variabilă, cum ar fi „x este φ", pentru scrierea unor asemenea funcţii propoziţionale se întrebuinţează litere greceşti:

$$\varphi(x),\ \psi(x),\ \chi(x),\ \ldots$$

Deoarece uneori, atribuind la întîmplare o valoare argumentului unei funcţii propoziţionale, s-a dat peste o propoziţie care nu poate fi declarată adevărată sau falsă, Russell, şi după el toţi logicienii, au trebuit să limiteze valorile admisibile pentru argumentul unei funcţii propoziţionale. Aşa a apărut *teoria tipurilor*, precum şi alte teorii, despre care nu vom vorbi aici, ci cînd va fi vorba de încercările de soluţionare a paradoxelor şi cînd vom face critica lor.

Propoziţii generale şi existenţiale. Dintr-o funcţie propoziţională f(x) putem obţine o propoziţie pe două căi: 1) sau înlocuind argumentul cu o valoare constantă $x = a$ şi căpătînd f(a); 2) sau prin *cuantificare.*

Cuantificarea se face cu ajutorul *operatorului de generalizare* sau cu ajutorul *operatorului existențial*. Dacă plecăm de la funcția propozițională f(x) și spunem „f(x) pentru toți x", cu alte cuvinte că f(x) ia valoarea de adevăr „adevărat" pentru oricare valoare a argumentului x, am obținut o propoziție generală, care se scrie astfel:

$$(x) \cdot f(x)$$

Simbolul (x) se numește „operatorul de generalizare" și transformă o funcție propozițională într-o propoziție generală, care poate fi afirmată [funcția f(x) nu poate fi afirmată].

Operatorul de existență se notează cu simbolul $(\exists x)$ pus înaintea unei funcții propoziționale; scrierea

$$(\exists x) \cdot f(x)$$

ne duce la o propoziție de existență și înseamnă: „f(x) nu este fals pentru toți x", sau încă „există cel puțin un x pentru care f(x) este valabilă".

Rezultă că avem prin definiție:

$$(\exists x) \cdot f(x) \cdot =_{Df} \cdot \sim [(x) \cdot \sim f(x)]$$

Ceea ce înseamnă: „f(x) uneori" este același lucru cu „este fals că pentru toți x, f(x) este falsă".

Să considerăm două funcții propoziționale variabile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$; dacă prima implică pe a doua, oricare ar fi x, atunci scriem:

$$(x) \cdot \varphi(x) \supset \psi(x)$$

Aceasta este o implicație generală și se citește: „dacă $\varphi(x)$ este valabilă, atunci și $\psi(x)$ este valabilă, oricare ar fi x". Se mai scrie lucrul acesta și sub forma:

$$\varphi(x) \supset_x \psi(x)$$

Același lucru în ceea ce privește echivalența. Expresia

$$(x) \cdot \varphi(x) \equiv \psi(x)$$

înseamnă: „pentru oricare x, $\varphi(x)$ este echivalent cu $\psi(x)$". Se mai poate scrie acest lucru și astfel:

$$\varphi(x) \equiv_x \psi(x)$$

Deoarece $(x) \cdot f(x)$ și $(\exists x) \cdot f(x)$ nu reprezintă decît aparent funcții propoziționale, și ele sînt în fapt propoziții, x este o *variabilă aparentă* sau, cum se mai numește, *o variabilă legată*. Într-o funcție propozițională f(x) intervine însă o variabilă *reală* sau *liberă*. Se găsesc exemple în matematici de astfel de variabile *aparente* (*legate*). În orice integrală definită,

$$\int_a^b f(x)dx,$$

variabila este aparentă (legată), căci valoarea acestei expresii este o constantă.

3. Clase

Am văzut ce este o mulțime sau o clasă. Să presupunem că avem o funcție propozițională $\varphi(x)$; valorile lui x care satisfac această funcție au toate o proprietate comună (predicatul φ) și ele formează o *clasă*, care se notează simbolic astfel:

$$\hat{x}(\varphi x)$$

Oricare valoare particulară $x = a$, care verifică funcția $\varphi(x)$, aparține acestei clase. Vom nota apartenența unui element a la o clasă prin semnul $\in$, ca și în teoria mulțimilor. Așadar,

$$a \in \hat{x}(\varphi x)$$

înseamnă: „a este un element dintre acelea pentru care funcția $\varphi(x)$ devine adevărată". Prin definiție, avem deci:

$$a \in \hat{x}(\varphi x) \cdot = \cdot \varphi(a) \qquad \text{Def.}$$

Sau, în general,

$$z \in \hat{x}(\varphi x) \cdot = \cdot \varphi(z) \qquad \text{Def.}$$

Tot astfel, dacă un element z nu aparţine clasei $\hat{x}(\varphi x)$, el nu face adevărată funcţia noastră. Întrebuinţînd semnul de negaţie, putem scrie:

$$z \sim \in \hat{x}(\varphi x) \cdot = \cdot \sim \varphi(z) \qquad \text{Def.}$$

„Dacă z nu aparţine clasei determinate de $\varphi(x)$, aceasta înseamnă că $\varphi(z)$ este falsă".

Dacă două funcţii $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt echivalente în mod general, adică dacă avem

$$\varphi(x) \equiv_x \psi(x),$$

aceasta nu poate să însemne decît că ele sînt satisfăcute de aceleaşi valori, deci că ele determină aceleaşi clase. Cu alte cuvinte, putem scrie:

$$\varphi(x) \equiv_x \psi(x) \cdot \equiv \cdot \hat{z}(\varphi z) = \hat{z}(\psi z)$$

Echivalenţa universală a funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ echivalează cu egalitatea claselor determinate de ele.

Din ceea ce am spus pînă acum, rezultă că o funcţie f(x) (cu un singur argument) defineşte o clasă: clasa elementelor care au predicatul f. De aceea se mai spune că o clasă este sfera sau extensiunea unui predicat (Carnap [1], p. 18).

Fiind dată o funcţie f(x), toţi x care o verifică formează o clasă, pe care să o notăm cu α:

$$\alpha = \hat{x}(fx)$$

Toţi x care nu verifică această funcţie formează clasa contrară lui α; după notaţia lui Russell (care este aceea a lui Peano), ea se notează cu $-\alpha$. Aşadar, „$-\alpha$" este clasa tuturor acelor x care nu verifică f(x):

$$-\alpha = \sim \hat{x}(fx)$$

A spune că un element x aparţine clasei $-\alpha$ înseamnă acelaşi lucru cu a spune că el nu aparţine clasei α:

$$x \in -\alpha \cdot = \cdot x \sim \in \alpha \qquad \text{Def.}$$

Mai putem exprima lucrul acesta şi astfel: „este fals că x aparţine clasei α":

$$x \in -\alpha \cdot = \cdot \sim (x \in \alpha) \qquad \text{Def.}$$

Prin urmare, notaţiile

$$x \in -\alpha$$

$$x \sim \in \alpha$$

$$\sim (x \in \alpha)$$

reprezintă acelaşi lucru.

Vom menţiona încă relaţiile dintre clase (despre care am mai vorbit la teoria mulţimilor). Mai întîi se pot forma şi clase de clase. Un exemplu concret este următorul: Organizaţia Naţiunilor Unite conţine ca membri naţiunile engleză, rusă, franceză, americană etc. Clasa francezilor este un membru al clasei Naţiunilor Unite, dar un cetăţean francez, care este un membru al clasei francezilor, nu este membru al clasei Naţiunilor Unite.

Clasa M, formată cu toate elementele a două clase α şi β, este *reuniunea* claselor α şi β, ca şi în teoria mulţimilor:

$$M = \alpha \cup \beta$$

Clasa M a elementelor comune a două clase α şi β este *conjuncţia* claselor α şi β:

$$M = \alpha \cap \beta$$

O clasă α poate să aibă toate elementele ei printre elementele altei clase β; în acest caz clasa α este *inclusă* în clasa β:

$$\alpha \subset \beta$$

Avem următoarele definiţii:

$$\vdash :\cdot \alpha \subset \beta \cdot =_{Df} x \in \alpha \cdot \supset_x x \in \beta$$

„Dacă oricare ar fi x, x aparţine clasei α implică x aparţine lui β, aceasta înseamnă că α este inclus în β".

$$\vdash :. \alpha \cap \beta =_{Df} \hat{x}(x \in \alpha \cdot x \in \beta)$$

„Clasa tuturor acelor x care aparțin clasei α și în același timp clasei β este intersecția claselor α și β"

$$\vdash :. \alpha \cup \beta =_{Df} \hat{x}(x \in \alpha \cdot v \cdot x \in \beta)$$

„Clasa tuturor acelora care aparțin clasei α sau clasei β este „reuniunea claselor α și β".

Dintre teoremele stabilite în *Principia Mathematica*, în legătură cu noțiunea de clasă, vom menționa aici numai două, anume cele două forme silogistice ale primului mod al primei figuri, în *Barbara*:

T11 $\vdash : \alpha \subset \beta \cdot \beta \subset \gamma \cdot \supset \cdot \alpha \subset \gamma$

T12 $\vdash : \alpha \subset \beta \cdot x \in \alpha \cdot \supset \cdot x \in \beta$

Silogismul T11 spune: dacă clasa α este inclusă în clasa β și în același timp β este inclusă în clasa γ, atunci clasa α este inclusă în clasa γ. (Toți grecii sînt oameni, oamenii sînt muritori, deci toți grecii sînt muritori.)

Silogismul T12 spune: dacă clasa α este inclusă în clasa β și în același timp x aparține clasei α, atunci x aparține clasei β. (Socrate este om, toți oamenii sînt muritori, deci Socrate este muritor.)

Definiție și identitate. În cele ce precedă, am utilizat semnul „=" ca semn logic de definiție. Același semn este întrebuințat ca semn de identitate. Definiția semnului de identitate este următoarea:

$$x = y \cdot = \cdot (\varphi) \cdot \varphi(x) \supset \varphi(y) \qquad \text{Def.}$$

Cu alte cuvinte, x este identic cu y dacă, oricare ar fi proprietatea pe care o are x, y, are și el această proprietate. Sau încă: x este identic cu y dacă toate proprietățile lui x sînt și ale lui y. Se vede că semnul de definiție (în dreptul căruia este scris totdeauna Def.) nu este definit el însuși, dar semnul de identitate este definit. Neidentitatea dintre x și y se scrie:

$$x \neq y$$

Russell scrie, prin definiţie:

$$x \neq y \cdot = \cdot \sim (x = y) \qquad \text{Def.}$$

*

Formalizînd logica, aşa cum am arătat mai sus, Russell a creat un instrument de precizie şi rigoare matematică, şi a crezut că poate realiza programul logicist al lui Frege, de a funda matematicile pe logică şi pe noţiunea logică de clasă (mulţime). El s-a izbit însă de dificultăţi mari, între care cea mai importantă este apariţia antinomiilor în chiar acest formalism logic. Cu toate perfecţionările aduse ulterior, logica matematică, ca şi teoria mulţimilor, nu a putut evita apariţia paradoxelor decît prin introducerea unor convenţii, după cum se va vedea în expunerea care urmează.

III

PARADOXELE LOGICO-MATEMATICE

1. Paradoxul lui Burali-Forti

Matematicianul italian Burali-Forti [1] a publicat în anul 1897 o antinomie pe care a întîlnit-o în teoria mulţimilor. Burali-Forti a expus acest paradox utilizînd mijloace formale, în speţă, aparatul logicii simbolice, aşa cum ea fusese constituită de Peano şi şcoala italiană.

Acest paradox se poate formula în felul următor: se demonstrează în teoria mulţimilor că: 1) orice serie de numere ordinale defineşte un număr ordinal; 2) acest număr ordinal este mai mare cu o unitate decît cel mai mare număr ordinal al seriei date; 3) seria ordinalelor (în ordinea mărimii lor) este bine ordonată. Să considerăm acum seria tuturor numerelor ordinale; această serie defineşte un număr ordinal să-l notăm cu Ω, care este cel mai mare dintre toate numerele. În acest caz, seria tuturor numerelor ordinale conţine cel mai mare număr ordinal Ω, şi deci numărul ordinal definit de această serie nu este Ω, ci $\Omega + 1$. Contradicţia este izbitoare: dacă Ω este numărul ordinal definit de seria *tuturor* ordinalelor, atunci nu Ω este numărul ordinal definit de seria *tuturor* ordinalelor, ci $\Omega + 1$.

2. Parodoxul lui Cantor

O contradicţie asemănătoare referitoare la cel mai mare număr cardinal a fost descoperită de Cantor [1] în 1899, dar nu a fost publicată decît în 1926 de Zermelo.

Fie M *mulţimea tuturor mulţimilor* şi Nc, numărul său cardinal: Nc este cel mai mare număr cardinal posibil. Pe de altă parte, o teoremă binecunoscută a teoriei mulţimilor spune: numărul cardinal al mulţimii tuturor submulţimilor lui M este mai mare decît numărul cardinal Nc al mulţimii M. Contradicţia este evidentă: numărul cardinal Nc al mulţimii M a tuturor mulţimilor este cel mai mare număr posibil, dar el nu este cel mai mare, pentru că numărul cardinal al mulţimii tuturor submulţimilor lui M este mai mare ca Nc.

3. Paradoxul lui Russell

Russell [1] a descoperit în 1903 un paradox înrudit cu cel al lui Cantor, dar avînd o structură logică mai simplă. Se constată că există mulţimi care *îşi aparţin ca element* şi că există de asemenea mulţimi care nu-şi aparţin ca element. De exemplu, mulţimea tuturor noţiunilor abstracte este ea însăşi o noţiune abstractă, deci *ea se conţine* ca element; mulţimea tuturor noţiunilor, determinate este ea însăşi o noţiune determinată, deci ea îşi aparţine ca element.

Dimpotrivă, mulţimea tuturor mamiferelor, de exemplu, nu este ea însăşi un mamifer, deci nu îşi aparţine ca element. Cu toate că existenţa mulţimilor care îşi aparţin ca element a fost contestată, problema care urmează nu depinde de faptul că asemenea mulţimi există sau nu există, după cum foarte bine a observat Fraenkel [3], din moment ce propoziţia „orice mulţime îşi aparţine ca element sau nu îşi aparţine, *tertium non datur*", este o tautologie *şi deci este adevărată* independent de faptul că asemenea mulţimi există sau nu în realitate. Toate mulţimile care se conţin ca element formează o nouă mulţime G; toate mulţimile care nu se conţin ca element formează o nouă mulţime Γ. Deoarece orice mulţime se conţine sau nu se conţine ca element, o a treia posibilitate neexistînd, trebuie ca şi mulţimea

Γ să se conțină sau să nu se conțină ca element. Dacă se conține ca element, atunci ea nu poate să se conțină, deoarece, prin definiție Γ nu conține decît mulțimile care nu se conțin ca element; dacă mulțimea Γ nu se conține ca element, atunci, prin definiție, ea se conține. Contradicția este izbitoare.

Exprimat prin simboluri, paradoxul apare și mai simplu. Definiția mulțimii Γ este „mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element", ceea ce se scrie

$$\alpha \in \Gamma =_{Df} \sim \alpha \in \alpha$$

Aceasta fiind adevărat, oricare ar fi mulțimea α, avem echivalența generală (pentru orice α):

$$(x) \cdot \alpha \in \Gamma \equiv \sim \alpha \in \alpha$$

Pentru valoarea particulară a lui α, în speță $\alpha = \Gamma$, obținem:

$$\Gamma \in \Gamma \equiv \sim \Gamma \in \Gamma$$

Propoziția „mulțimea Γ se conține ca element" este echivalentă cu propoziția „mulțimea Γ nu se conține ca element", ceea ce este contradictoriu.

Mai tîrziu, Russell (1905) a arătat că se poate obține un paradox asemănător fără a se mai introduce noțiunea de mulțime, numai prin întrebuințarea noțiunii de predicat. Să examinăm un predicat oarecare: dacă are proprietatea exprimată de el însuși, vom spune că are proprietatea să fie *predicabil*; dacă nu acceptă proprietatea exprimată de el însuși, vom spune că are proprietatea de a fi *impredicabil*. De exemplu, predicatul *abstract* este el însuși abstract, deci este *predicabil*; predicatul *imaginabil* este el însuși imaginabil, deci este *predicabil*; predicatul *determinat* este el însuși determinat, deci este *predicabil*; dimpotrivă, predicatul *mamifer* nu este el însuși mamifer, deci este *impredicabil* etc.

Un predicat dat admite ca predicat proprietatea pe care o exprimă, sau nu o admite; orice predicat este deci *predicabil* sau *impredicabil*, *tertium non datur*.

Să punem acum această problemă pentru predicatul *impredicabil*: și el trebuie să fie *predicabil* sau *impredicabil*,

o a treia posibilitate nu există. Dacă predicatul *impredicabil* este *predicabil*, atunci admite proprietatea exprimată de el însuşi, deci este *impredicabil*; dacă predicatul *impredicabil* este *impredicabil*, atunci are proprietatea exprimată prin el însuşi, deci este *predicabil*. Contradicţia este evidentă.

Exprimat în simboluri, acest paradox se scrie, ca şi în cazul precedent, foarte uşor. Avem definiţia „dacă un predicat ψ nu are predicatul ψ, atunci predicatul ψ are predicatul *impredicabil*" (notăm *impredicabil* = *Imp*):

$$Imp(\psi) =_{Df} \sim \psi(\psi)$$

Această definiţie fiind valabilă pentru orice predicat, rezultă echivalenţa generală (pentru orice ψ)

$$(\psi) \cdot Imp(\psi) \equiv \psi(\psi)$$

Pentru valoarea particulară a lui ψ, adică $\psi = Imp$, obţinem

$$Imp(Imp) \equiv \sim Imp(Imp)$$

Propoziţia „*impredicabil*" este „*impredicabil*" este echivalentă cu propoziţia „*impredicabil* nu este *impredicabil*" ceea ce este absurd.

Importanţa acestor paradoxe construite de Russell constă mai ales în faptul că ele arată că natura acestor contradicţii este pur logică şi că ele nu apar ca urmări ale cîtorva noţiuni matematice mai complexe, sau mai puţin precise — cum ar fi noţiunea de mulţime —, ci în cadrul logicii obişnuite, utilizînd noţiunea logică de predicat, sau aceea de clasă — extensiunea unui predicat — care corespunde noţiunii de mulţime.

4. Paradoxul lui Richard

Jules Richard [1] a publicat în 1905 un paradox prin care urmărea să demonstreze că nu e nevoie să se ajungă pînă la teoria numerelor ordinale pentru a descoperi o asemenea contradicţie.

Să considerăm alfabetul francez, care conţine 26 de litere: să notăm toate *aranjamentele* de *două litere* care se

pot face cu aceste 26 de litere şi apoi să le clasăm în ordine alfabetică; să formăm apoi toate aranjamentele de trei litere şi să le scriem tot în ordine alfabetică; să formăm apoi aranjamentele de patru litere etc. Aceste aranjamente pot să conţină aceeaşi literă repetată de mai multe ori, ceea ce înseamnă că avem aranjamente cu repetiţie.

Oricărui număr întreg p îi va corespunde un aranjament de p litere care se va găsi în acest tabel şi, cum tot ceea ce se poate scrie este un aranjament de litere, tot ce se poate scrie se va găsi în acest tabel al cărui mod de formare a fost indicat.

Definiţia unui număr fiind făcută prin cuvinte (şi acestea fiind compuse din litere), rezultă că unele dintre aceste aranjamente vor fi definiţii de numere. Să ştergem, din aceste aranjamente, aranjamentele care nu sînt definiţii de numere. Fie U_1 primul număr definit printr-un aranjament, U_2, al doilea, U_3 al treilea etc. Am înşirat astfel, într-o ordine determinată, *toate numerele definite printr-un număr finit de cuvinte*. Deci, toate numerele care se pot defini printr-un număr finit de cuvinte formează o mulţime E, care poate fi *numerabilă*.

Iată acum unde este contradicţia. Se poate forma un număr care să nu aparţină acestei mulţimi.

«Fie p a n-a zecimală a n-ului număr din mulţimea E; să formăm un număr avînd pentru întreg, zero, şi pentru a n-a zecimală p + 1, dacă p nu este egal nici cu 8, nici cu 9 şi unitatea, în caz contrar». Acest număr N nu aparţine mulţimii E. Dacă ar fi al n-lea număr al mulţimii E, a n-a cifră a sa ar fi a n-a cifră zecimală a acestui număr, ceea ce nu este adevărat.

Să însemnăm cu G grupul de litere cuprins între ghilimele. Numărul N este definit de cuvinte din grupul G, adică de un număr finit de cuvinte; el ar trebui deci să aparţină mulţimii E. Dar am văzut că el nu aparţine acestei mulţimi. Aceasta este contradicţia.

Am reprodus aproape textual acest paradox, aşa cum a fost formulat de Richard însuşi.

Paradoxul lui Richard a fost prezentat, sub o formă simplificată, de Carnap [3]. Fie *Zpr* (*Zahlpredikat*) un predicat prin care reprezentăm numere reale, adică numere al căror singur argument ia ca valoare o expresie

numerică. Putem numerota fiecare predicat *Zpr* printr-un număr natural luînd în consideraţie, de exemplu, ordinea lexicografică a propoziţiilor care îl definesc, sau altfel. Fie ,,a'' expresia unui număr; acest număr va fi richardian, dacă numărul a este numărul unui predicat *Zpr*, de exemplu P_a, iar P(a) este fals (cu alte cuvinte, dacă predicatul cu indicele numeric a nu convine indicelui său a).

Ţinînd seama de aceste indicaţii, richardian este un predicat *Zpr* bine definit, iar a, în consecinţă, un număr de ordine, să zicem b. Acest număr b trebuie să fie, la rîndul său, richardian sau non-richardian, *tertium non datur*. Dacă b este richardian, el nu admite, conform definiţiei, proprietatea cu numărul b, care este richardian, deci b nu este richardian; dacă b nu este richardian, el admite proprietatea cu numărul b, care este richardian, deci b este richardian.

Să exprimăm în simboluri această contradicţie, după Carnap [3].

Fie o limbă logică S, în care întrebuinţăm un functor „num", prin care se poate reprezenta o numărare univocă a tuturor predicatelor *Zpr* ale limbii S. De exemplu, dacă „P" este un *Zpr* (predicat de număr), „num P" este o expresie a unui număr.

Univocitatea acestei numărări este presupusă:

$$[\text{num}(F) = \text{num}(G)] \supset (x)[F(x) = G(x)] \qquad (1)$$

Să definim acum *predicatul richardian* = *Ri*:

$$Ri(x) \equiv (F)[(\text{num}(F) = x) \supset \sim F(x)] \qquad (2)$$

Dar pentru că „*Ri*" este un *Zpr*, el are un număr pe care îl vom nota cu „num(*Ri*)". Să presupunem acum că numărul predicatului „*Ri*" este richardian: „*Ri*[num(*Ri*)]". Rezultă astfel conform punctului [2], că dacă se înlocuieşte ,,x", cu ,,num(*Ri*)" şi „F" cu „*Ri*", se ajunge la: $\sim$ *Ri*[num(*Ri*)]. Presupunerea făcută de noi că „num(*Ri*)" este *richardian*, ducînd la o contradicţie, aceea că „num(*Ri*)" nu este *richardian*, trebuie declarată falsă, deci:

$$\sim Ri[\text{num}(Ri)] \qquad (3)$$

Din (1)

$$[\mathrm{num}(F) = \mathrm{num}(Ri)] \supset [\sim F[\mathrm{num}(Ri)] \equiv \sim Ri[\mathrm{num}(Ri)]] \quad (4)$$

Din relațiile (3) și (4)

$$[\mathrm{num}(F) = \mathrm{num}(Ri)] \supset \sim F[\mathrm{num}(Ri)] \quad (5)$$

Din relația (2)

$$(F)[(\mathrm{num}(F) = \mathrm{num}(Ri)] \supset \sim F[\mathrm{num}(Ri)] \supset Ri[\mathrm{num}(Ri)] \quad (6)$$

Din (5) și (6)

$$Ri[\mathrm{num}(Ri)] \quad (7)$$

Propozițiile (3) și (7), amîndouă demonstrate, sînt contradictorii.

Observăm că demonstrația lui Carnap este prea lungă și că putem reduce acest paradox la paradoxul lui Russell, format cu predicatele *predicabil* și *impredicabil*. Într-adevăr, să presupunem că scriem toate predicatele numerelor reale într-o ordine oarecare, fie, de exemplu, în ordine lexicografică. Fiecărui predicat i se va atașa un indice numeric:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$

Fiecărui predicat de număr îi corespunde un număr natural și numai unul, care este indicele său: corespondența este univocă. Fiecare indice poate admite ca predicat predicatul pe care îl numerotează sau nu-l poate admite, *tertium non datur*. Dacă indicele x al unui predicat P_x nu admite predicatul P_x, atunci x va fi numit richardian; dacă x admite proprietatea de număr P_x, atunci el nu va fi *richardian*. Orice număr natural, care este indice al unuia dintre predicatele de numere, este deci *richardian* sau *non-richardian*; o a treia posibilitate nu există. Dar predicatul *richardian* este el însuși un predicat de numere și, în consecință, el se clasează în seria de predicate, într-o poziție determinată b, adică el este Ri_b. Avem deci definiția:

$$Ri_b(x) =_{Df} \sim P_x(x)$$

De unde, echivalența generală (pentru orice x):

$$(x) \cdot Ri_b(x) \equiv \sim P_x(x)$$

Pentru valoarea particulară a lui x, în speță x = b, predicatul $P_x = P_b = Ri_b$ și obținem:

$$Ri_b(b) \equiv \sim Ri_b(b)$$

Propoziția „b este richardian" este echivalentă cu propoziția „b nu este richardian".

5. **Paradoxul lui Zermelo-König**

Acest paradox, descoperit de Zermelo [1] în 1905, se referă la teorema binecunoscută, care îi poartă numele, asupra mulțimilor *bine ordonate*. Același raționament a fost expus de König într-o comunicare făcută la Congresul de la Heidelberg (1904), pentru a demonstra imposibilitatea pentru *continuu* de a fi *bine ordonat*, ceea ce duce la respingerea ipotezei *continuului* a lui Cantor.

Să examinăm mulțimea numerelor reale R care pot fi exprimate printr-un număr de cuvinte finit și determinat. Fie R′ mulțimea tuturor celorlalte numere reale. Orice număr real dat aparține sau mulțimii R, sau mulțimii R′, *tertium non datur*, și nu poate aparține, în același timp, ambelor mulțimi R și R′. În virtutea teoremei lui Zermelo, mulțimea numerelor reale este bine ordonată. Fie ρ primul element al mulțimii R′ în această bine-ordonare: elementul ρ aparține mulțimii R′, dar noi l-am definit cu un număr de cuvinte finit, deci el trebuie să aparțină mulțimii R. Contradicția este evidentă.

6. **Paradoxul lui Berry**

Acest paradox este o simplificare a antinomiei lui Richard și a fost publicat de Russell în 1906.

Să presupunem un vocabular destul de vast al unei limbi date, de exemplu acela al limbii române; el conține, cu toate acestea, un număr finit de cuvinte. Să examinăm toate frazele care pot fi construite cu ajutorul a maximum 50 de cuvinte din această limbă; numărul frazelor va fi finit. Să examinăm acum colecția completă C a tuturor frazelor care definesc fiecare un număr natural cu maximum

50 de cuvinte. Colecţia C va fi finită, ca şi colecţia N a numerelor naturale care pot fi definite, fiecare, printr-o frază a colecţiei C. Există încă numere naturale finite care nu aparţin colecţiei N şi care, în consecinţă, nu pot fi definite cu ajutorul frazelor din colecţia C. Printre aceste numere naturale va exista unul care va fi cel mai mic şi care va fi numărul lui Berry. Să examinăm acum fraza: „Numărul lui Berry este cel mai mic număr natural care *nu poate fi definit* cu ajutorul unei fraze care conţine maximum 50 de cuvinte luate din vocabular". Această frază are numai 27 de cuvinte şi defineşte perfect un număr natural, numărul lui Berry; din moment ce ea este formată cu un număr mai mic decît 50 de cuvinte, ea aparţine colecţiei C; deci numărul definit de ea, numărul lui Berry, aparţine colecţiei N, ceea ce este contradictoriu.

7. Paradoxul lui Grelling - Nelson

Paradoxul descoperit în 1908 de Grelling şi Nelson [1] este analog cu paradoxul lui Russell construit cu predicatele *predicabil* şi *impredicabil.*

Nu mai e vorba de clase, sau de predicate, ci de cuvinte. Cuvintele unei limbi date se pot împărţi în două categorii: unele care admit proprietatea pe care o exprimă şi altele care nu admit proprietatea pe care o exprimă. De exemplu, cuvîntul „scurt" este el însuşi scurt; cuvîntul „românesc" este el însuşi românesc; dar cuvîntul „lung" nu este el însuşi lung; cuvîntul „englez" nu este el însuşi englez etc. Vom spune că, dacă un cuvînt posedă proprietatea pe care o exprimă, el este *autologic*; dacă el nu posedă proprietatea pe care o exprimă, el este *heterologic*. Dar un cuvînt dat are proprietatea pe care o exprimă, sau nu o are, o a treia posibilitate nu există, orice cuvînt este *autologic* sau *heterologic*, *tertium non datur*. Să examinăm acum cuvîntul „heterologic" ; el trebuie să fie *autologic* sau *heterologic*. Dacă cuvîntul „heterologic" este *autologic*, el are proprietatea pe care o exprimă, deci este *heterologic*; dacă cuvîntul „heterologic" este *heterologic*, el are proprietatea pe care o exprimă, deci este *autologic*. Ne găsim în faţa unei contradicţii.

Acest paradox se poate exprima cu uşurinţă în simboluri.

Să desemnăm un cuvînt oarecare prin «C», iar proprietatea pe care el o exprimă, prin C; definiția predicatului *heterologic* = *Het* este deci:

$$Het(«C») =_{Df} \sim C(«C») \qquad (1)$$

Această definiție fiind valabilă, oricare ar fi cuvîntul C, avem echivalența generală (pentru oricare «C»):

$$(«C») \cdot Het(«C») \equiv \sim C(«C») \qquad (2)$$

Pentru valoarea particulară a lui «C» = «*Het*», obținem paradoxul:

$$Het(«Het») \equiv \sim Het(«Het») \qquad (3)$$

8. Paradoxul lui Skolem

Skolem a descoperit o contradicție (1923) în legătură cu formalizarea cîtorva axiomatizări ale teoriei mulțimilor.

Să presupunem că elaborăm o axiomatizare consistentă a teoriei mulțimilor. Teorema lui Löwenstein-Skolem-Gödel arată că această axiomatizare admite un model *numerabil*, fie $(M, \in)$.

În aceste condiții, axiomatizarea admisă ar trebui să ne ducă la demonstrarea existenței unei mulțimi infinite z. Trebuie deci ca M să conțină un element z și o serie infinită *numerabilă* de elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k, \ldots$; ajungem astfel la:

$$e_1 \in z,\ e_2 \in z,\ e_3 \in z,\ \ldots,\ e_k \in z,\ \ldots$$

Pe de altă parte, axiomatizarea admisă va trebui să permită demonstrarea existenței mulțimii Uz, a tuturor submulțimilor lui z: M trebuie să conțină un element y avînd aceeași proprietate ca și elementele lui M, adică f_1, f_2, ..., care aparțin lui y,

$$f_1 \in y,\ f_2 \in y,\ \ldots,\ f_k \in y,\ \ldots$$

corespunzînd diverselor submulțimi ale lui z.

Dar z este o mulţime infinită numerabilă şi mulţimea acestor submulţimi trebuie să aibă puterea continuului. Elementele f_1, f_2, ..., f_k, ... ale lui M constituie o mulţime avînd puterea continuului, ceea ce contrazice supoziţia că M este numerabil.

9. Paradoxul lui Gödel

Gödel (1931) a construit un paradox care are o semnificaţie mai vastă decît cele citate mai sus, de unde importanţa şi rolul decisiv care i se acordă în toate sistemele logicii formale.

Gödel [1] îşi propune să arate că speranţa matematicienilor de a exprima formal şi complet matematicile este iluzorie şi că în orice sistem logico-formal, ca *Principia Mathematica* sau *sistemul lui Zermelo-Fraenkel* (dezvoltat de J. von Neumann, şi care este sistemul axiomatic al teoriei mulţimilor), există probleme relativ simple (din teoria numerelor întregi) care nu pot fi rezolvate.

Logica simbolică utilizează simboluri pentru a nota noţiuni. Din punct de vedere formal (punctul de vedere metamatematic) este indiferent care sînt simbolurile primitive pe care le alegem pentru noţiunile logice. Gödel alege ca semne primitive (*Grundzeichen*) numerele naturale, adică seria: 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

O formulă va fi deci o serie finită de numere naturale, iar o demonstraţie (*Beweisfigur*) va fi o serie finită de serii finite de numere naturale. Matematica va fi exprimată în acest fel. *Metamatematica*, ştiinţa care vorbeşte despre propoziţiile matematice, va fi formată din concepte şi propoziţii matematice şi cum acestea din urmă sînt exprimate prin serii finite de numere naturale, înseamnă că propoziţiile şi conceptele metamatematice vor fi concepte şi propoziţii asupra numerelor naturale (sau asupra seriilor finite de numere naturale).

Pe scurt, Gödel numerotează fiecare noţiune primitivă printr-un număr întreg pozitiv. În loc să spună „noţiunea (sau propoziţia) reprezentată prin cutare semn simbolic", el spune „noţiunea (sau propoziţia) care are cutare număr".

Prin această corespondență, Gödel a creat un sistem izomorf cu sistemul *Principia Mathematica*, în domeniul numerelor naturale.

Să examinăm acum clasele claselor (ele definesc, după cum se știe, numerele naturale). Fiecare clasă va avea un semn determinat care se va numi semnul de clasă (*Klassenzeichen*). Semnele claselor vor fi aranjate într-o ordine oarecare, fie ordinea lexicografică, fie după suma membrilor etc. Fie R simbolul care reprezintă ordinea aleasă, adică relația ordonatoare a semnelor de clasă. Putem să numerotăm acum aceste semne de clasă: primul, al doilea, al treilea... al n-lea. În consecință, dacă ni se dă ordinea R în care am ordonat semnele de clasă, știm imediat ce număr are fiecare semn de clasă. Vom nota

$$R(n)$$

acest semn, care va avea semnificația : în ordinea R, semnul de clasă care are numărul n.

O clasă este definită în *Principia Mathematica* prin $\hat{x}(fx)$, f(x) fiind funcția definitorie. Variabila liberă este x și trebuie să remarcăm că în definiția unei clase nu există decît o variabilă liberă.

Dacă variabila x ia valori de clase, atunci $\hat{x}(fx)$ este o clasă de clase ; avem, de asemenea, o singură variabilă liberă. Fie α semnul unei anumite clase ; vom nota prin

$$[\alpha; n]$$

formula care este obținută din semnul de clasă cînd se înlocuiește variabila liberă prin semnul numărului natural n.

Să definim acum o clasă K de numere naturale, după cum urmează :

$$n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n)\,;\,n] \qquad (1)$$

(s-a prescurtat cuvîntul german *beweisbar* = demonstrabil, iar linia este semnul negației).

Definiția noastră spune că un număr natural n aparține clasei K dacă, pentru el, formula [R(n) ;n] nu este demonstrabilă.

Ca urmare a acestor definiţii, rezultă că există un număr de clasă S, aşa încît formula [S ;n] arată că numărul natural n aparţine lui K.

Dar cum S este un număr de clasă, înseamnă că el are un număr de ordine q şi că S este identic — conform definiţiei semnului de clasă — cu R(q) :

$$S = R(q)$$

Gödel arată că propoziţia

$$[R(q); q]$$

este indeterminabilă în sistemul lui Russell. Într-adevăr, dacă propoziţia [R(q); q] ar fi demonstrabilă, ea ar fi adevărată, deci q ar aparţine lui K ; dar am obţine, conform punctului (1) :

$$q \in K \equiv \overline{Bew}\ [R(q); q]$$

adică, propoziţia [R(q); q] ar fi indemonstrabilă, în contradicţie cu ipoteza. Dacă [R(q); q] ar fi falsă, negaţia sa ar fi valabilă, deci q nu ar aparţine lui K, deci propoziţia $\overline{q \in K}$ ar fi adevărată:

$$\overline{q \in K} \equiv Bew\ [R(q); q]$$

Prin urmare, [R(q); q] este demonstrabilă, ca şi negaţia ei, ceea ce este contradictoriu.

Din acest paradox, Gödel trage următoarea concluzie: ,,In orice clasă de formule non-contradictorii, există propoziţii non-decidabile (*unentscheidbare*)".

Acest paradox a fost demonstrat în mai multe feluri, căutîndu-se, fie probe mai simple, fie probe mai directe, fie probe mai precise, după cum au procedat Carnap, R.M. Robinson, Mostowski etc.

Analogia acestui paradox cu cel al lui Richard este izbitoare şi a fost remarcată de Gödel însuşi. Hilbert [1] vede în acest paradox paradoxul mincinosului. Într-adevăr, dacă cineva declară — scrie Hilbert — „Propoziţia pe care o spun acum nu poate să fie rezultatul unei demonstraţii", această propoziţie duce la o contradicţie, ca şi propoziţia „mint" (de care ne vom ocupa mai departe).

Concluziile care decurg din demonstraţia lui Gödel sînt foarte grave şi arată imposibilitatea de a exprima complet, printr-un sistem formal, orice teorie care conţine aritmetica.

10. Paradoxul mincinosului

Există un paradox foarte vechi, care are o mare analogie cu paradoxele descoperite de matematicienii contemporani în teoria mulţimilor, sau cu cele pur logice. Acest paradox, care a fost reţinut de logica actuală ca fiind adevărat, este faimosul paradox al mincinosului — ψευδόμενος.

Se pare că Eubulide, din şcoala din Megara, a enunţat pentru prima oară acest paradox. El a fost formulat iniţial după cum urmează, reducîndu-l la o simplă întrebare) la care mincinosul trebuia să răspundă: „Minţi cînd spui că minţi?" Dar mincinosul nu are decît două răspunsuri, *tertium non datur*: 1) „mint"; 2) „nu mint".

Dacă cel care spune că minte, minte, înseamnă că nu e adevărat că minte, deci el nu minte; dacă cel care spune că minte, nu minte, înseamnă că e adevărat că minte, deci el minte. În consecinţă, propoziţia „mint" nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, pentru că ea ia imediat valoarea contrarie.

O altă formă a acestui paradox este aceea cunoscută sub numele de „Epimenide": „Epimenide cretanul spunea că toţi cretanii sînt mincinoşi". Ajungem la aceeaşi contradicţie dacă vrem să aflăm dacă ceea ce afirmă Epimenide este adevărat sau fals.

Importanţa acordată acestei probleme, chiar de la apariţia ei, poate să fie evaluată prin faptul că o mulţime de autori vechi s-au ocupat de ea şi că Aristotel însuşi o discută în mai multe rînduri; Seneca (epistola 45) afirmă că asupra acestui sofism „s-au scris atît de multe cărţi"; celebrul dialectician Chrysippos i-a acordat un loc deosebit în tratatele sale de logică, dintre care cîteva erau consacrate în întregime studiului „mincinosului"; istoria consemnează faptul curios al morţii lui Philetas, provocată de eforturile zadarnice făcute pentru rezolvarea acestui sofism . . .

Există diverse variante ale acestui paradox, cea mai simplă fiind: „propoziția pe care o pronunț acum este falsă". Alte variante, puțin mai dezvoltate, sînt numite, după cum spune Aulus Gellius în lucrarea sa *Nopțile atice*, ἀντιστρέφωντα sau *reciproca* și apar mai ales, printre sofismele considerate de Stoici ca gimnastică dialectică. Sofismul crocodilului sau argumentarea în procesul intentat de Protagoras elevului său Eulathos sînt exemple binecunoscute de asemenea argumente *reciproca*. Vom cita una dintre aceste variante, după Ferdinand Gonseth [1].

Într-o insulă trăia o rasă de uriași foarte șireți și cruzi. Fiindcă erau cruzi, ei omorau pe orice străin care acosta pe insulă; fiindcă erau șireți, hotărîseră să-l pună să-și dea singur sentința de moarte. Îi puneau o întrebare și dacă răspunsul era adevărat îl jertfeau idolului adevărului, dacă răspunsul era fals, îl jertfeau idolului minciunii. Însă, s-a întîmplat ca odată, uriașii să-i pună unui străin, mai șiret decît ei, întrebarea: „Care îți va fi moartea?" Străinul a răspuns: „O să mă jertfiți idolului minciunii". Puși în încurcătură, uriașii au început să discute. Dacă acest om a spus adevărul, trebuie să fie jertfit idolului adevărului, dar, în acest caz, afirmația sa este o minciună; dacă acest om a spus o minciună, trebuie jertfit idolului minciunii, dar atunci a spus adevărul. Propoziția străinului nu poate fi declarată nici adevărată nici falsă, pentru că, în orice caz, ea duce la o contradicție.

Tratatele scolastice de logică oferă o mulțime de variante ale acestui paradox și ele au constituit o problemă arzătoare și specială a logicii evului mediu, ajungînd să ocupe capitole întregi în manualele de logică, capitole intitulate *Insolubilia*. Forma cea mai simplă o găsim enunțată în toate aceste tratate, ca de exemplu la Albertus de Saxonia: *Propono illud insolubile « Ego dico falsum » supposito, quod nihil aliud dicam nisi istam propositionem «Ego dico falsum»; et quaeritur, utrum propositio prolata a me sit vera vel falsa* (Propun această insolubilă « Eu spun falsul », presupunînd că nu spun nimic altceva decît această propoziție « Eu spun falsul »; și se întreabă dacă propoziția pronunțată de mine este adevărată sau falsă). Sau în forma: « *Propositio scripta in illo folio est falsa* » (« Propoziția scrisă pe acea foaie este falsă »).

În ceea ce priveşte argumentele *reciproca* ale scolasticilor, ele se găsesc peste tot sub forma următoare, ca, de exemplu, în tratatul lui Buridan.

Socrate pronunţă o singură propoziţie « *Plato dicit falsum* » şi Platon pronunţă o singură propoziţie « *Socrates dicit falsum* ». Care dintre aceste două propoziţii este adevărată şi care este falsă? Se ajunge la aceeaşi contradicţie ca aceea din paradoxul uriaşilor cruzi şi şireţi.

11. Pseudoparadoxele

Printre paradoxele aparente se citează mai ales două: cel al străjerului şi paradoxul bărbierului.

Paradoxul străjerului (Russell, 1918) se referă la dreptul de cutumă roman, care definea străjerul unui sat ca fiind persoana obligată să trezească pe toţi sătenii care nu se trezesc singuri, şi era singurul care avea acest drept, dar nu îi era permis să trezească pe cei care se puteau trezi şi singuri.

Iată acum contradicţia care rezultă: aceeaşi problemă se pune pentru străjer; cine îl trezeşte? Dar nu există decît două posibilităţi: sau se trezeşte singur, sau nu se trezeşte singur, *tertium non datur*. 1) Dacă se trezeşte singur, înseamnă că este capabil să se trezească singur, dar atunci nu are dreptul să se trezească; 2) dacă nu se trezeşte singur, este obligat după lege, să se trezească singur.

Un pseudoparadox analog este acela al bărbierului satului: bărbierul satului este definit ca acela care rade pe toţi cei care nu se rad singuri. Problema este aceeaşi: cine rade pe bărbierul satului? Dacă trebuie să se radă singur, atunci nu poate să se radă pentru că el nu rade decît pe cei care nu se rad singuri; dacă nu se rade singur, atunci, conform definiţiei, trebuie să se radă singur.

După cum remarcă Beth [1], paradoxul străjerului, ca şi altele din aceeaşi categorie, nu ridică probleme de logică, cu toate că pot provoca probleme destul de grave de drept (în cazul străjerului) sau practice (în cazul bărbierului).

În paradoxele autentice se întrebuinţează una sau mai multe noţiuni fundamentale ale logicii sau ale matematicii: paradoxul mincinosului este construit cu noţiunile logice

„adevărat" şi „fals"; paradoxul lui Russell, cu noţiunea de mulţime sau clasă; paradoxul lui Burali-Forti și Cantor cu noţiunile de număr ordinal și cardinal; paradoxul lui Grelling-Nelson, cu noţiunea de proprietate a unui cuvînt; paradoxele lui Berry, Richard și Zermelo-König cu noţiunile de definiţie, numerabil și bine ordonare; paradoxul lui Gödel cu noţiunile de demonstrabilitate, adevăr etc. De aici, consecinţele extrem de grave pentru matematică şi logică, care îl conduc pe Beth [1] (pe care l-am urmărit în cîteva puncte din expunerea paradoxelor) la concluzia:

„Pentru acest motiv, descoperirea antinomiilor a compromis atît de grav și logica generală și teoria mulţimilor care era considerată o rivală a logicii; pentru acest motiv, descoperirea antinomiilor constituie un pericol atît de mare pentru întregul edificiu al științelor deductive și, mai ales, pentru matematică".

IV

ÎNCERCĂRI DE A GĂSI O SOLUȚIE

1. Despre soluțiile paradoxelor în general

Istoria filozofiei întîlnește, în mai multe rînduri, probleme ale unor construcții logice, numite, în general, paradoxe sau antinomii, construcții în aparență ireproșabile, dar inadmisibile din pricina rezultatelor absurde la care ele duc; gîndirea logică, în procesul său necesar, le creează, dar gîndirea însăși se găsește în imposibilitatea de a le admite. În prezența unor asemenea dificultăți, a unor asemenea *aporii*, s-au emis diferite soluții, pe care le vom clasifica în două categorii generale, caracterizînd astfel pozițiile adoptate:

A) poziția filozofică; B) poziția logică.

A) **Poziția filozofică.** Vom numi soluție filozofică a antinomiilor orice soluție care introduce un principiu sau axiomă (sau mai multe), străine de mecanismul logic în interiorul căruia s-a produs contradicția. În această categorie putem grupa soluțiile următoare:

a) Soluția eleaților. Pentru a da o soluție celebrelor paradoxe „Ahile și broasca țestoasă", „dihotomia", „săgeata" sau „stadiile", eleații au introdus distincția între realitate și aparență, real nefiind decît raționalul. Lumea fenomenelor, nefiind pe de-a întregul rațională, este iluzorie.

b) Poziția ontologică. Pentru această concepție, antinomiile reprezintă conflicte reale, în sînul realității, fac parte din natura Ființei. Aceasta era poziția

lui Heraclit, sau în timpurile moderne aceea a lui Hegel, iar în filozofia contemporană, poziția iraționaliștilor. Heraclit rezolvă aceste contradicții într-o armonie superioară; Hegel într-o sinteză superioară, iar iraționaliștii le consideră ireductibile.

c) P o z i ț i a e p i s t e m o l o g i c ă. Din această categorie putem cita pe sofiști, pe sceptici și micii-socratici, care, toți, au căutat să anuleze puterea de cunoaștere a gîndirii logice, construind paradoxe mai mult sau mai puțin demne de a fi luate în considerație.

d) P o z i ț i a l u i K a n t. Construind antinomiile rațiunii pure, filozoful de la Königsberg a tras concluzii diametral opuse celor ale eleaților: gîndirea pură nu este valabilă în domeniul realității în sine, dar ea este total adecvată lumii fenomenelor.

e) P o z i ț i a l o g i c o - m a t e m a t i c ă c o n t e m p o r a n ă. De pe această poziție se recunoaște existența ireductibilă a paradoxelor, care apar în mod inexorabil în orice simbolism logic formal și în teoriile matematice formalizate, din pricina naturii limitate a oricărui formalism. Soluția logico-matematică constă în admiterea unei axiome suplimentare restrictive (sau a mai multor), mai mult sau mai puțin convenționale, care se atașează sistemului logic considerat în care se produc paradoxele și grație cărora se crede că se vor putea evita paradoxele.

Aspectul filozofic al unei astfel de soluții a fost recunoscut de către specialiștii cei mai autorizați în acest domeniu, încît nu mai e necesar a-l demonstra. Astfel, de exemplu, Bertrand Russell scrie [4]: „În acest sens și ca urmare a faptului că se ocupă de probleme încă nerezolvate, logica matematică ține de filozofie".

De altfel, problemele generale ale bazelor matematicii sînt reduse la două de către Mostowski [1]:1) Natura conceptelor matematice; 2) natura demonstrației matematice și care anume sînt criteriile care ne permit să distingem o demonstrație corectă de una falsă. Mostowski spune textual: „Aceste probleme sînt de natură filozofică și nu putem să ne așteptăm la rezolvarea lor numai în limitele matematicii și aplicînd numai metodele matematice".

B) **Poziția strict logică.** Această poziție a fost cea a lui Aristotel, așa cum a fost formulată în ultima carte a

Organon-ului, Περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων: orice paradox este un sofism și se reduce deci, în ultimă analiză, la o eroare de logică.

Toate tratatele de logică clasică, începînd de la Aristotel, au menținut clasificarea și soluțiile date de Stagirit, menționînd faptul că paralogismele cele mai dificile de rezolvat sînt cele care formează un cerc vicios, de felul *petitio principii* sau *circulus in probando*, adică exact cele de felul paradoxelor logico-matematice.

Printre adepții acestei concepții și care constituie imensa majoritate, începînd cu Socrate și pînă la logicienii de la începutul secolului nostru, vom cita în mod special pe logicienii scolastici, care au dat o importanță considerabilă rezolvării sofismelor în general și, în special, rezolvării paradoxelor, în tratatele numite *Insolubilia* și în centrul cărora se găsea antinomia mincinosului cu toate variantele sale. Găsim problema *Insolubilia* chiar și în *Summulae logicales* a lui Petrus Hispanus, la Petrus d'Ailly, la Wilhelm din Occam etc. Care era poziția logicienilor din această epocă? În *Logica Magna* a lui Paulus Venetus (*Tractatus* VI: *Insolubilia*) găsim enumerate 15 categorii de soluții, dintre care nici una nu admite că o asemenea problemă ar fi cu adevărat insolubilă. Totuși, anumiți logicieni scolastici au evocat concepția după care există probleme cu adevărat insolubile, care nu pot fi rezolvate în nici un fel — *nullo modo possunt solvi*. Se găsește, de exemplu, citată această opinie, după care într-o insolubilă există cu adevărat două propoziții contradictorii care ar fi false în același timp, opinie aflată în micul tratat logic al lui Hentisberus († 1380), avînd titlul *De sensu composito et diviso*: „*Scribit una opinio in insolubilibus satis est possibile, quod duo contradictoria sint simul falsa*". Această poziție ar fi fost probabil adoptată de către un anume Suisset (probabil Richard Suiseth), dar, așa cum remarcă Prantl ([1], IV, p. 90), noi nu avem nici un tratat de logică de la el. Oricum ar fi, această opinie n-a jucat nici un fel de rol în evul mediu și ea nu a avut nici o importanță doctrinară iar Paulus Venetus nu o menționează.

Se poate deci afirma că evul mediu a avut concepția logică a paradoxelor, după care există o soluție logică a tuturor acestor contradicții și a căutat soluția lor și nu o

regulă prohibitivă oarecare, mulţumită căreia s-ar fi putut evita insolubilele.

În alţi termeni, problemele numite *Insolubilia* purtau acest nume din pricina dificultăţii rezolvării lor şi nu pentru că ar fi fost considerate cu adevărat insolubile; aceste probleme erau privite ca fiind sofisme. De altfel, aşa se şi exprimă Wilhelm din Occam, de exemplu, în celebrul său tratat *Summa totius logicae* (Compendiu al întregii logici): *„Non ideo dicuntur sophismata aliqua insolubilia, quia nullo modo possunt solvi, sed quia cum difficultate solvuntur"* (Nu de aceea se numesc unele sofisme insolubile fiindcă nu se pot rezolva în nici un mod, ci fiindcă se rezolvă cu dificultate). Putem regăsi această părere, exprimată într-un mod identic, la toţi marii logicieni ai epocii care s-au ocupat de această problemă.

În sfîrşit, printre contemporani, cel care s-a menţinut în mod ferm pe o poziţie pur logică a fost H. Poincaré, care, în discuţia cu Bertrand Russell, a susţinut că este suficient a descoperi că o asemenea problemă conţine un cerc vicios, pentru ca problema să dispară, ca o eroare. Poincaré [1] scria: „Astfel, definiţiile care trebuie privite ca non-predicative sînt cele care conţin un cerc vicios". Aceasta era şi poziţia lui Richard, care susţinea că definiţia mulţimii tuturor mulţimilor nu este predicativă, nefiind bazată pe o proprietate. Este adevărat că problema este mai complicată şi că răspunsul lui Richard sau Poincaré, deşi adevărat, nu este capabil să elucideze toate punctele problemei, ceea ce a fost foarte bine remarcat de Russell [2]: „Poïncaré crede că toate aceste paradoxe provin dintr-un fel de cerc vicios şi aici sînt de acord cu el. Dar el nu vede dificultatea de a evita un cerc vicios de acest fel".

O poziţie analogă este şi cea a lui Ch. Perelman [1] şi [3] căreia s-a alăturat şi M. Barzin: toate antinomiile teoriei mulţimilor şi ale logicii sînt, după Perelman, greşeli de logică. Deşi Perelman a căutat în mai multe rînduri să depisteze această eroare, nu a reuşit şi a ajuns, la sfîrşit, tot la prohibiţii convenţionale.

În sfîrşit, credem că putem clasa printre soluţiile pur logice tentativa lui Behmann de a oferi o soluţie a paradoxelor, bazată în mod exclusiv pe condiţia pascaliană a definiţiei.

2. Teoria tipurilor

Primul care a observat că problema antinomiilor cantoriene trebuie să fie pusă pe un plan pur logic şi că este de ordin pur formal este logicianul englez Bertrand Russell. El scria în *Principia Mathematica*:

„Voi observa că aceste paradoxe nu sînt în mod exclusiv în legătură cu ideile de număr şi cantitate. În consecinţă, nici o soluţie care caută să le explice mai bine, ca rezultatul unei întrebuinţări nejuste a acestor idei, nu poate fi adecvată. Soluţia trebuie găsită scrutînd ideile logice fundamentale".

Soluţia lui Russell, care constituie în mod incontestabil cel mai important efort de a găsi o soluţie a paradoxelor, este numită de Russell „teoria tipurilor logice". Această teorie derivă din principiul cercului vicios: paradoxele — care sînt toate cercuri vicioase — s-ar naşte din faptul că se presupune că o colecţie de obiecte poate să conţină membri care nu pot fi definiţi decît cu ajutorul colecţiei luate în totalitatea ei. Propoziţiile care afirmă asemenea lucruri sînt declarate de Russell ca lipsite de sens (*meaningless*). De exemplu, paradoxul clasei claselor care nu se conţin ca element este astfel rezolvat de către Russell: o clasă este un obiect care derivă dintr-o funcţie propoziţională $\varphi(x)$ şi care presupune funcţia. Atunci, o clasă nu poate fi argumentul funcţiei care o defineşte, adică dacă notăm cu $\hat{z}(\varphi z)$ clasa definită de funcţia $\varphi(z)$, simbolul $\varphi[\hat{z}(\varphi z)]$ trebuie privit ca fiind lipsit de sens, în virtutea principiului cercului vicios.

În consecinţă, argumentul unei funcţii nu poate lua valori arbitrare iar valorile care i se pot atribui sînt limitate. În felul acesta, Russell ajunge să stabilească o ierarhie logică a conceptelor, adică: indivizii, obiecte logice de tipul to; proprietăţile indivizilor, concepte de tipul t1; proprietăţile indivizilor, conceptele de tipul t2 etc. Teoria tipurilor stabileşte că nu se poate aplica un concept de tipul n decît unui concept de tipul n — 1, cu alte cuvinte, în funcţia propoziţională $\varphi(x)$, argumentul x nu poate lua decît valori de tipul n — 1 dacă φ este de tipul n. Expresiile de forma $\alpha \in \alpha$ sau $\sim \alpha \in \alpha$, sau în comprehensiune $\varphi(\varphi)$

sau $\sim\varphi(\varphi)$ etc., nerespectînd teoria tipurilor, nu au nici un sens şi sînt excluse din simbolismul logic; propoziţiile „abstract este abstract" sau „concret este abstract", sau „clasa α conţine clasa α ca element" etc. nu mai sînt posibile şi deci paradoxele nu pot fi construite.

Într-un mod analog, Russell stabileşte diferite tipuri de adevăr: cînd afirmăm adevărul sau falsul unei propoziţii p, de exemplu „p este fals", utilizăm un tip de adevăr; cînd spunem propoziţia „p este fals" este falsă, utilizăm un alt tip de adevăr etc. Tipizarea noţiunii de adevăr a fost demonstrată de către R. Carnap [1] şi A. Tarski [1]. Teoremele stabilite de către aceşti logicieni arată că valoarea de adevăr a unei propoziţii, construită într-un sistem logic S, nu poate fi enunţată în însuşi sistemul S, ci într-un metasistem S′, care se referă la propoziţiile sistemului S, deci el nu se confundă cu S.

Mincinosul nu poate spune care este valoarea de adevăr a propoziţiei „eu mint", deoarece nu se poate construi valoarea de adevăr a acestei propoziţii în însuşi sistemul de propoziţii ale mincinosului, ci într-un alt limbaj logic care se referă la toate propoziţiile mincinosului!

Legînd acest rezultat de paradoxul lui Gödel, care, după cum am văzut, arată că în orice sistem formalizat (care conţine aritmetica) există propoziţii non-decidabile, logicienii au ajuns la concluzia surprinzătoare că orice formalism deductiv are limitele sale iar deductibilitatea logică nu poate depăşi anumite limite.

Deoarece matematica ar trebui să se reducă la aritmetică iar aceasta ar trebui să se reducă la logică, această concluzie a fost aplicată la întreaga matematică, în general, după cum spune şi Carnap [3]: „Pentru orice sistem al aritmeticii se pot da noţiuni aritmetice indefinisabile şi propoziţii indecidabile. Matematica nu poate fi epuizată printr-un sistem, ci necesită o serie infinită de limbajuri mai bogate".

Această concluzie, în care se poate descifra cu siguranţă o înfrîngere de natură sceptică, este formulată de Mostowski [1], în 1955, în felul următor: „Sub influenţa lucrărilor lui Hilbert şi a tezelor şcolii neopozitiviste, s-a imaginat, în primele două decade ale acestui secol, că cea mai importantă problemă a bazelor matematicii este construcţia unei

limbi artificiale cu reguli sintactice, în mod precis definite, și printre care ar exista o limbă universală și perfectă care ar putea fi identificată cu matematica... Credem că astăzi aceste sisteme nu au decît o valoare istorică".

Ideea că orice simbolism logic și, în general, că orice simbolism matematic este limitat a apărut lui Russell însuși, chiar de la primele sale cercetări. Russell a observat că nu este posibil să exprimăm toate regulile unui formalism logic în simboluri, de exemplu, regula deductivă a substituției: în orice formulă adevărată (tautologie) se poate substitui unui aceluiași simbol o expresie propozițională arbitrară, cu condiția de a înlocui peste tot acest simbol cu noua expresie, și formula care rezultă rămîne adevărată. Dar acest principiu nu este formalizat și din această cauză se atribuie o anumită insuficiență formalismului în general sau, cum spune Russell: „*This principle... eludes formal statement, and points to a certain failure of the formalism in general*" (Acest principiu ... scapă unui tratament formal și indică un oarecare eșec al formalismului în genere). De unde și concluzia lui Brunschwicg [1], care analizează acest impas logistic: „Logicienii s-au bazat pe punerea în formă simbolică a legilor logicii pentru a elimina orice urmă de intuiție și pentru a ajunge la sfera pură a conceptelor; dar mi se pare... că în simbolul însuși rămîne întotdeauna o urmă de intuiție și că trebuie să depășești simbolismul pentru a depăși intuiția".

Care este baza logică a teoriei tipurilor? Russell spune că, deși această teorie s-a născut din necesitatea de a evita (*avoid*) paradoxele, ea are un caracter mai larg, deoarece ea are o anumită consonanță cu simțul comun, ceea ce o face „*inherently credible*".

Iată singura bază a teoriei tipurilor, bază care nu are nimic logic. Obiecția principală care i se poate aduce rezidă deci în aceea că ea nu are un caracter necesar. Este ea cel puțin suficientă pentru a evita antinomiile? Vom construi mai departe paradoxe pe care această teorie nu poate să le evite.

Ceea ce este mai grav este faptul că Russell, declarînd prin teoria tipurilor o serie de propoziții lipsite de sens — cele care conduc la paradoxe —, elimină totodată și propozițiile care au un sens precis, cum ar fi propozițiile „abstract

este abstract" sau „abstract nu este concret", deși aceste propoziții sînt singurele pe care însuși exigentul Anthistene le admisese...

Trebuie să remarcăm, de acord cu Hao Wang [1], că teoria tipurilor nu împiedică complet formarea claselor numite *non-predicative* (după expresia lui Poincaré), adică definiția unei clase cu ajutorul unei totalități din care clasa însăși face parte. Într-adevăr, sistemul lui Russell admite o axiomă numită *axioma de comprehensiune*, după care „există întotdeauna o clasă de tipul n + 1 corespunzînd oricărei fraze care servește drept definiție pentru obiectele de tipul n". În virtutea acestei axiome, fiind dată o clasă n_3, de tipul 3, există o clasă y_2 de tipul 2, așa fel că:

$$(x_1) \cdot [x_1 \in y_2 \equiv (Ez_2) \cdot (x_1 \in z_2 \ \& \ z_2 \in w_3)]$$

y_2 este o clasă de tipul 2, dar definită totuși cu ajutorul unei variabile legate de tipul 2, adică z_2; deci:

y_2 este definită cu ajutorul unei totalități din care y_2 face parte. Iar Hao Wang adaugă: „se găsește că o parte importantă a matematicilor superioare nu poate deriva din teoria tipurilor decît dacă admitem clasele non-predicative de tipul y_2. Deci, deși putem fi convinși că paradoxul lui Russell ca și celelalte paradoxe bine cunoscute nu pot să fie derivate imediat, admiterea claselor non-predicative ne împiedică de a fi pe deplin convinși că teoria tipurilor este non-contradictorie". ([1], p. 14).

3. Antinomii logice și antinomii semantice

Frege și Russell au căutat să fundamenteze aritmetica (și prin aceasta întreaga matematică, dacă ea ar fi putut fi redusă la aritmetică) cu ajutorul logicei clasice și a noțiunii de mulțime, care este, de altfel, noțiunea logică de clasă. Dificultățile întîlnite în realizarea acestui program logicistic, l-au împins pe Russell la inventarea teoriei tipurilor pentru a elimina paradoxele. Cu toate că teoria tipurilor s-a născut dintr-o necesitate mai generală, ea a dat loc altor dificultăți, care n-au putut fi depășite decît cu ajutorul unei noi axiome. La început, Russell a fost obligat să intro-

ducă, pe lîngă teoria simplă a tipurilor, de care am vorbit deja, *teoria ramificată a tipurilor*, după care funcţiile propoziţionale ale aceluiaşi tip au fost împărţite în ordine. Noi dificultăţi au fost rezolvate de către Russell prin introducerea unei axiome suplimentare, *axioma reductibilităţii*, cu ajutorul căreia se poate reduce o funcţie propoziţională, în condiţii date, la primul ordin. Acceptarea acestei axiome, ca şi a celorlalte două axiome, cea a infinitului şi cea a alegerii ar încărca programul iniţial al lui Frege-Russell cu prea multe dificultăţi care n-ar putea fi depăşite, lucru care a determinat pe matematicieni să caute a uşura, pe cît era posibil, teoria tipurilor. Printre primii care au căutat să renunţe la teoria ramificată a tipurilor sînt Chwistek (1922) şi Ramsey (1926).

Ramsey [1] a împărţit antinomiile în două grupuri distincte:

A. Grupul paradoxelor care conţin noţiuni logice sau matematice, ca acelea de clasă sau de număr, de exemplu, paradoxele lui Burali-Forti, Russell, Cantor etc.;

B. Grupul paradoxelor care nu conţin asemenea noţiuni, ci numai referinţe privind limbajul, gîndirea sau simbolismul utilizat, ca acelea întîlnite în paradoxul mincinosului, al lui Richard, al lui Grelling-Nelson etc.

Ramsey numeşte antinomiile din grupa A *antinomii logice*, iar antinomiile din grupa B, *antinomii epistemologice*. (Acestea din urmă au fost semnalate şi de către Peano. Logicienii polonezi sau cei din şcoala din Viena le numesc antinomii lingvistice, semantice sau sintactice.)

Distincţia introdusă de către Ramsey, acceptată astăzi în toate lucrările de logică matematică, arată că antinomiile semantice nu pot apărea în nici un sistem logic sau matematic; dar cum antinomiile logice (din grupa A) pot fi evitate prin teoria simplă a tipurilor, teoria ramificată a tipurilor, ca şi axioma de reductibilitate, devin inutile. Exact ceea ce s-a şi întîmplat: în cea de-a doua ediţie (vol. I, 1925) a monumentalei opere *Principia Mathematica*, Russell a renunţat la teoria ramificată şi la axioma de reductibilitate, ca o consecinţă a criticii făcute de Ramsey şi Wittgenstein.

Această reducere a dificultăţii poate să pară un progres. Este unul, într-adevăr, dar nu din punct de vedere logic,

căci problema paradoxelor semantice implică aceeași gravitate pentru securitatea mecanismului logic.

Pentru a putea evita, de asemenea, și antinomiile semantice, Russell a sugerat el însuși ideea de a extinde teoria tipurilor la o teorie a „nivelurilor de limbaj" (în introducerea la *Tratatul logico-filozofic* al lui Wittgenstein). Această teorie a limbajelor și a metalimbajelor logice a fost realizată prin lucrările lui Ramsey [1], Carnap [1] și Tarski [1]. După cum există o ierarhie a tipurilor pentru concepte, tot așa există o ierarhie a limbajelor.

Regula devine în acest caz următoarea: nu se poate vorbi despre un limbaj în însuși limbajul întrebuințat, ci într-un *metalimbaj*. În acest fel, antinomiile lingvistice își găsesc soluția lor. De exemplu, în antinomia lui Grelling-Nelson și în propoziția „cuvîntul scurt este scurt", cuvîntul „scurt" este utilizat de două ori; dar al doilea cuvînt „scurt" aparține unui limbaj superior primului și, în consecință, proprietatea de a fi *scurt* a cuvîntului „scurt" al primului limbaj nu este proprietatea reprezentată prin al doilea cuvînt „scurt", ci o proprietate analogă a metalimbajului (care vorbește despre limbajul dat). Aceste diverse tipuri de limbaj nu trebuie să fie confundate, căci confuzia lor ar produce paradoxele semantice, după cum confuzia tipurilor de concepte ar provoca antinomiile logice.

După cum vedem, teoria „nivelurilor de limbaj" este și ea tot atît de puțin fundată ca și teoria tipurilor logice.

De altfel, în aceasta rezidă obiecția fundamentală care li se aduce: aceste teorii nu sînt necesare, ele sînt artificiale, ceea ce provoacă un sentiment profund de insatisfacție intelectuală. Atunci, de ce le acceptăm? Răspunsul este formulat, într-un mod foarte sincer, de către Reichenbach [1]: „S-a pus chestiunea dacă este necesar să se introducă aceste reguli. Un lucru pare să fie sigur: singurul motiv pe care putem să-l dăm pentru astfel de reguli este că ele exclud contradicțiile. Nu se pune problema dacă teoria tipurilor sau teoria nivelurilor de limbaj este adevărată. Aceste teorii reprezintă restricții ale regulilor de formare și sînt astfel convenții introduse pentru motivul de a face limbajul nostru necontradictoriu".

Dar o chestiune *„poate fi pusă"*: ce rămîne din rigoarea logică dacă îi atașăm arbitrarul? Și apoi, ce semnificație epis-

temologică poate să mai păstreze o logică a cărei non-contradicție este asigurată prin convenție?

Dacă lucrurile s-ar opri la acest punct, edificiul logic ar fi un joc de copii, compus din piese separate, din care se se poate construi un alt edificiu, după bunul plac. Atunci coerența logică devine, în definitiv, o convenție cu noi înșine!

Vedem deci că acceptarea unor asemenea soluții pune în discuție probleme și mai grave decît cele ale paradoxelor și, în ultimă analiză, anulează însăși necesitatea teoretică a logicii, deși îi justifică valoarea practică.

4. Soluția lui Richard

Am expus paradoxul lui Richard în însăși forma dată de autor (cap. III, 4). După ce a construit paradoxul și a demonstrat contradicția, Richard [1] arată că această contradicție este numai aparentă. Iată explicația textuală dată de Richard (cititorul este rugat să se refere la expunerea acestui paradox).

„Să arătăm că această contradicție nu este decît aparentă. Să revenim la aranjamentele noastre. Grupul de litere G este unul din aceste aranjamente; el va exista în tabloul meu. Dar la locul pe care îl ocupă el nu are sens. Este vorba de mulțimea E și aceasta nu este încă definită. Ar trebui deci să-l șterg. Grupul G nu are sens decît dacă mulțimea E este complet definită, iar aceasta nu este definită decît printr-un număr infinit de cuvinte. *Deci, nu există contradicție.*

Putem încă să mai remarcăm și aceasta: mulțimea mulțimii E și a numărului N formează o altă mulțime. A doua mulțime este numerabilă.

Numărul N poate fi intercalat într-un anumit rang k în mulțimea E, dînd înapoi cu un rang toate celelalte numere aparținînd rangului superior lui k. Să continuăm să numim E mulțimea astfel modificată. Atunci grupul de cuvinte G va defini un număr N′ diferit de N, deoarece numărul N ocupă acum rangul k și a k-a cifră a lui N′ nu este egală cu cea de-a k-a cifră a k-ului număr al mulțimii E”.

În rezumat, aşa cum a observat şi Poincaré [1], E este mulţimea *tuturor* numerelor pe care le putem defini printr-un număr finit de cuvinte, fără a introduce noţiunea de mulţime E.

Altfel definiţia lui E ar conţine un cerc vicios; nu putem defini pe E prin însăşi mulţimea E. Însă, spune Poincaré, am definit pe N cu un număr finit de cuvinte, este adevărat, dar sprijinindu-ne pe noţiunea de mulţime E. Şi iată de ce N nu face parte din E.

Şi Poincaré adaugă: „În exemplul ales de Richard, concluzia se prezintă cu toată evidenţa şi evidenţa va apărea şi mai mare dacă ne vom referi la însuşi textul scrisorii sale. Dar aceeaşi explicaţie este valabilă şi pentru celelalte antinomii, după cum este uşor de verificat. Astfel, *definiţiile care trebuie considerate ca non-predicative sînt acelea care conţin un cerc vicios*".

Iată soluţia lui Richard, care a fost adoptată de Poincaré. Vom vedea, mai departe, că această observaţie este perfect justificată, dar ea nu ia în consideraţie decît un aspect al problemei. Ea poate fi formulată în ceea ce numim „interdicţia noţiunilor non-predicative".

5. Intuiţionismul lui Brouwer

Ideile fundamentale ale doctrinei intuiţioniste sînt reduse de către Heyting [3] la următoarele:

1. Matematica nu are numai o semnificaţie formală ci şi o semnificaţie în conţinut.
2. Obiectele matematice sînt sesizate de către gîndire într-un mod imediat; cunoaşterea matematică este, în consecinţă, independentă de experienţă.

După Brouwer, matematica este gîndirea exactă.

Tot ceea ce noi gîndim în mod exact şi cîteodată spontan, în orice fel de domeniu, este de natură matematică. Concepută în acest fel, matematica nu mai poate să se bazeze pe alte discipline, independente, nici chiar pe logică, pentru că în măsura în care acestea sînt exacte, ele sînt matematice. A căuta o bază matematicilor în alte discipline înseamnă atunci, în realitate, a căuta baza matematicii în matematică, ceea ce este un cerc vicios. Un singur suport poate fi găsit

pentru această știință: intuiția „care ne prezintă concepte și concluzii într-un mod imediat, în fața ochilor noștri".

Examinînd în lumina acestor principii principiile logicii clasice, Brouwer ajunge la concluzia că principiul terțului exclus nu poate fi aplicat în matematică decît cu o anumită rezervă. Iată modul în care Brouwer [1] susține această teză. Principiul fundamental al doctrinei intuiționiste este următorul: „Orice propoziție, care are un conținut, trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri (*Sachverhalte*) bine determinate și accesibile experienței noastre". Dar atunci avem consecința imediată: în domeniul colecțiilor infinite a spune că un element „a" aparține unei mulțimi „E" nu are sens dacă noi nu putem indica acest element, conform principiului enunțat. Cum putem afirma că o colecție are o infinitate de elemente dacă nu avem posibilitatea — deoarece în domeniul infinitului nu putem niciodată opera complet această indicație — să indicăm fiecare membru al acestei colecții?

Fie acum propoziția următoare *a*: „fiecare element din mulțimea k are proprietatea P": dacă mulțimea k este infinită, atunci negația acestei propoziții „a este falsă" nu satisface principiul brouwerian, deoarece nu avem posibilitatea de a arăta pentru o infinitate de lucruri, starea de lucruri care se opune ca ele să aibă proprietatea P. Care este concluzia lui Brouwer? Imitînd ceea ce se petrece în filozofie, matematicienii au extrapolat — după Brouwer, în mod nejustificat — adevărurile logice considerîndu-le ca fiind „ideale", de unde ar rezulta că ele ar fi valabile chiar și acolo unde nu există un control direct, ca, de exemplu, în domeniul infinitului. În special, s-a acordat o valoare universală principiului terțului exclus, care nu este aplicabil decît în domeniul colecțiilor finite. „Credința în eficacitatea nelimitată a principiului terțului exclus — scrie Brouwer — implică prin ea însăși, credința în caracterul finit și în structura atomică a lumii".

Urmează deci că în demonstrațiile indirecte, care întrebuințează principiul terțului exclus, adică în demonstrațiile care se fac printr-o *reductio ad absurdum*, principiul terțului exclus nu poate fi întrebuințat într-o formă generală. Într-adevăr, fie propoziția a „obiectul A are proprietatea P"; dacă afirm că este absurd ca această propoziție să fie fal-

să, nu rezultă că ea este adevărată, deoarece pentru a fi adevărată, ea trebuie să aibă o indicaţie experimentală sau de construcţie matematică ; dar există un caz în care noi nu putem proceda aşa, adică în cazul în care e vorba de colecţii infinite. De unde şi axioma lui Brouwer: *„absurditatea absurdităţii nu implică adevărul"* (dar adevărul implică absurditatea absurdităţii).

Limitînd domeniul aplicabilităţii principiului terţului exclus, Brouwer crede că poate elimina paradoxele infinitului. Totuşi, în logica intuiţionistă, acest principiu nu este declarat fals, ci numai nedemonstrabil. El rămîne în mod strict valabil în domeniul finitului.

Concepţia filozofică a lui Brouwer a condus pe Heyting [1] la construirea unei logici formale avînd alte axiome decît cele ale lui Russell şi în care dubla negaţie nu mai echivalează cu o afirmaţie. Pentru a distinge negaţia intuiţionistă de cea a lui Russell, Heyting întrebuinţează ca semn al negaţiei „¬". În logica lui Heyting, teorema următoare este demonstrată (formula lui Heyting 4.45) :

$$a \vee \neg a \cdot \supset \cdot \neg\neg a \supset a$$

Ce spune această formulă? Primul membru al implicaţiei este principiul terţului exclus : o propoziţie *a* este adevărată sau falsă, *tertium non datur* ; al doilea membru al implicaţiei spune că din dubla negaţie a unei propoziţii *a* rezultă afirmaţia propoziţiei *a*. Altfel spus, dacă pentru o propoziţie *a* principiul terţului exclus este valabil, atunci dubla negaţie a lui *a* ne conduce la afirmarea lui *a*. Transpoziţia acestei implicaţii nu este valabilă în logica lui Heyting. Dacă negăm falsul unei propoziţii *a*, nu rezultă afirmarea sa decît dacă în prealabil am presupus ca valabil principiul terţului exclus.

Pentru a găsi o interpretare a formulelor simbolice ale logicii intuiţioniste, Heyting este obligat să introducă o a treia valoare pentru propoziţii : există propoziţii *adevărate*, propoziţii *false* sau propoziţii care posedă o a treia valoare logică, care pentru Heyting înseamnă că ea nu este falsă, dar adevărul său nu poate fi demonstrat. Propoziţiile care provoacă paradoxele ar fi chiar acelea care ar avea o a treia valoare.

Trebuie să remarcăm că concepția intuiționistă, care încearcă să elimine paradoxele, sacrificînd valabilitatea universală a principiului terțului exclus, are o semnificație mai vastă și nu a fost imaginată numai ca soluție a problemei paradoxelor.

Eroarea comisă de către intuiționiști, în problema paradoxelor, constă în aceea că ei cred că principiul terțului exclus este acela care provoacă antinomiile iar soluția propusă de ei — amputarea acestui principiu — este îndreptată în acest sens ; în realitate, cel care este pus în cauză este în mod direct principiul contradicției, prin apariția acestor contradicții, după cum vom vedea mai departe. (Principiul contradicției rămîne intact în logica lui Brouwer-Heyting.)

6. Logicile polivalente

Criticile făcute principiului terțului exclus au condus la ideea că o propoziție ar putea lua mai mult de două valori — adevărul și falsul — și că ar fi posibil de construit sisteme logice plecînd de la alte axiome decît de la acelea ale logicii bivalente (formalizată de către Russell). Așa cum s-au putut construi geometriile neeuclidiene fără postulatul lui Euclid, tot așa s-au putut construi noi logici, fără principiul terțului exclus. S-a presupus, în consecință, că o propoziție poate lua trei valori, patru valori etc. și chiar o infinitate de valori ; alegînd un grup de axiome convenabile, s-a reușit să se construiască logici polivalente. Pentru o logică trivalentă, de exemplu, principiul terțului exclus nu mai este valabil, ea necesitînd un principiu al cuartului exclus. Fie trei valori — A, F și T — pe care poate să le ia o propoziție p : în acest caz orice propoziție p are fie valoarea A (adevăr), fie valoarea F (fals), fie o valoare T (a treia), *quartum non datur*.

Logici polivalente au fost construite de către Lewis, Lukasiewicz, Heyting, Church, Moisil, Bocivar etc. și s-a putut demonstra non-contradicția lor.

Aristotel [1] admisese că, în anumite cazuri, principiul terțului exclus nu mai funcționează, adică în cazul în care e vorba de „viitorii contingenți", în acest caz o afirmație fiind numai posibilă, dar nu și necesară. Această interpretare

a fost în mod foarte serios contestată de către Albrecht Becher [1] care susține, bazîndu-se pe textul *Hermeneuticei*, că Aristotel nu a acordat niciodată propozițiilor privind viitorul contingent o poziție particulară în raport cu principiul *tertium non datur*.

Se poate face o apropiere între această concluzie a lui Becher și observațiile făcute de către Bochenski [1] privind aceeași problemă. Bochenski nu găsește nicăieri în *Hermeneutica* (Cap. IX) o afirmație care să poată însemna o slăbire a principiului terțului exclus în raport cu *futura contingentia;* în schimb găsim asemenea considerații în *Metafizica* sau în alte texte. Bochenski interpretează faptul acesta în felul următor: considerațiile din *Hermeneutica* sînt logice iar cele din *Metafizica* sau din alte texte sînt metalogice.

Cei care au susținut cu putere valabilitatea universală a acestui principiu, în trecut, au fost stoicii, în mod special Chrysippos (deoarece ei erau deterministi). De unde și denumirea de *logici nechrysippiene* dată de Lukasiewicz logicilor care întrebuințează mai mult de două valori pentru propoziții.

Ideea de a lega sensul și valoarea principiilor logice, în general, de ideea timpului și, prin urmare, de ideea de determinism și cauzalitate a fost combătută de către Wittgenstein [1] și, în mod mai amplu, de către M. Schlick [1]. Înaintea lor, fenomenologia lui Husserl a relevat această eroare a psihologismului.

După acești gînditori, propozițiile logice și, în mod special, principiile logice sînt atemporale (*Zeitlos*).

Admițînd totuși că o propoziție poate lua trei valori într-o logică trivalentă, de exemplu, adevărul, falsul și terțul problema fundamentală care se pune este de a avea o interpretare sau o intuiție pentru a treia valoare, altfel această valoare nu reprezintă nimic. Lukasiewicz [1] a dat valorii T interpretarea de *posibil*, deși el a construit o logică cu trei valori, A, F și T fără nici o interpretare a lui T [2]. Paulette Février [1] a încercat să explice relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg printr-o logică trivalentă utilizînd a treia valoare, „absurdul", și construind în acest scop un calcul propozițional (formal) convenabil,

fiecare propoziţie fiind susceptibilă de a lua, în cadrul acestui calcul, trei valori: adevărul, falsul şi absurdul. Pentru Paulette Février „logica este funcţie de noţiunea obiectului de care ea se ocupă"; în consecinţă, deoarece noţiunea de obiect are o evoluţie continuă, ca orice concept, logica va trebui să se adapteze, logica clasică fiind insuficientă în raport cu proprietăţile noului obiect. Pentru acest obiect va fi necesară crearea unei noi logici, care este o logică trivalentă, aşa cum e aceea construită de Paulette Février, capabilă să organizeze în mod logic faptele aparent contradictorii ale lumii subatomice.

Aceste concluzii au fost generalizate de către J. L. Destouches [1] care a construit la rîndul său alte logici polivalente pentru studiul fizicii.

În felul acesta, Zawirski [1] crede că poate să explice paralelismul dintre fizica ondulatorie şi fizica corpusculară, care conduce la concluzia că realitatea se traduce prin două propoziţii contradictorii: electronul este o undă, dar el este şi un corpuscul. În logica trivalentă a lui Lukasiewicz, în care a treia valoare este „posibilă", faptele surprinzătoare din domeniul microfizicii pot fi interpretate. În logica bivalentă a lui Russell există o teoremă, conform căreia o propoziţie, din care se deduce echivalenţa a două propoziţii contradictorii este falsă.

$$[p \supset (q \equiv \sim q)] \supset \sim p$$

În consecinţă, teoria din care se deduce că electronul este corpuscul, dar el nu este corpuscul (pentru că el este o undă) este falsă. Fizica actuală nu poate fi interpretată în cadrul logicii bivalente, conchide Zawirski [2].

Dar dacă utilizăm logica trivalentă a lui Lukasiewicz, formula precedentă nu mai este adevărată şi, prin urmare, teoriile fizicii contemporane pot fi interpretate şi pot avea o semnificaţie logică, cu ajutorul unei formule trivalente, în care cea de-a treia valoare este „posibil".

Se vede că formula citată de Zawirski şi care este o tautologie trivalentă în logica lui Lukasiewicz, poate fi tot aşa de bine aplicată în cazul paradoxelor logico-matematice, care îşi găsesc astfel soluţia. Cu condiţia, bineînţeles, de a accepta o asemenea soluţie...

7. Soluția lui Behmann

Behmann a propus o soluţie foarte interesantă, de ordin pur formal, bazată pe condiţia definiţiei, stabilită de altfel de către Pascal: în orice definiţie trebuie să putem substitui definisantul definitului.

Behmann [1] raţionează după cum urmează: fie expresia formală

$$\sim \varphi(\varphi),$$

(care, interpretată în termeni obişnuiţi, înseamnă că φ nu convine lui însuşi ca predicat); dacă scriem prin prescurtare în loc de $\sim\varphi(\varphi)$ expresia $F(\varphi)$, căpătăm definiţia:

$$F(\varphi) = \sim \varphi(\varphi) \qquad \text{Def.}$$

De unde rezultă că pentru orice φ cele două expresii sînt echivalente:

$$(\varphi) \cdot F(\varphi) \equiv \sim\varphi(\varphi)$$

Această echivalenţă ne conduce, după cum se ştie, la antinomie, pentru valoarea particulară $\varphi = F$:

$$F(F) \equiv \sim F(F)$$

Behmann atrage atenţia asupra faptului că F este un semn introdus prin abreviere şi că esenţialul constă în aceea că orice abreviere nu este indispensabilă.

În consecinţă, ar trebui ca F să poată fi eliminat, înlocuindu-l cu semnificaţia sa simbolică, adică prin definisantul lui F, pe baza căruia F a fost introdus ca semn abreviativ şi ca această operaţie să fie în mod complet efectuată. Însă dacă încercăm să eliminăm pe F, obţinem $\sim F(F)$; dacă mergem mai departe, obţinem $\sim\sim F(F)$ şi aşa mai departe, la infinit. Se vede deci că, în cazul nostru, eliminarea semnului abreviativ F nu este posibilă şi nu putem reveni la semnele primitive substituind definitului semnele care servesc pentru a-l defini. Behmann ajunge la concluzia: „Nu există expresie liberă de semnele abreviative a cărei abreviaţie să fie F(F)”. Apare astfel că numai întrebuinţarea incorectă a semnelor abreviative provoacă apariţia antinomiilor. În virtutea acestei simple observaţii, Behmann se crede autorizat să formuleze regula următoare, care este în fond condiţia pascaliană a definiţiei: „Expresiile

care conţin semne abreviative sînt permise numai în cazul în care substituţia acestor semne prin semnificaţia lor simbolică este în mod total efectuabilă".

Astfel, antinomiile ar apărea ca rezultatul introducerii semnelor abreviative în anumite expresii. Observaţia lui Behmann ar fi foarte importantă, dată fiind natura sa pur logică, dacă ea nu ar degenera în soluţia banală, care spune că pentru a nu ajunge la antinomii, trebuie evitate abrevierile care conduc la antinomii! Din punct de vedere logic, vrem să ştim de ce în definiţia $F(\varphi) =_{Df} \sim \varphi(\varphi)$ simbolul F nu este un simbol definit? Behmann constată că F nu este definit, într-adevăr; dar de ce printr-o asemenea definiţie, care duce la paradoxe, simbolul F nu poate fi definit? Iată nodul problemei. (Vom vedea că soluţia propusă de noi va lămuri această chestiune.)

Din păcate, soluţia lui Behmann, remareabilă din punct de vedere logic, nu este suficientă pentru a rezolva toate antinomiile, aşa cum a arătat şi Dubislav [1], teoria tipurilor fiind încă necesară, cel puţin în parte, pentru a evita toate paradoxele.

O altă obiecţie a fost adusă de Härlen [1]: este imposibil a examina în general toate formulele pentru a şti dacă ele conţin semne abreviative incorect introduse; dacă întrebuinţarea unui semn abreviativ trebuie să fie întotdeauna însoţită de o demonstraţie de legitimitate, caracterul automatic al simbolismului ar fi distrus; pe de altă parte, o asemenea complicaţie ar fi mult mai dezavantajoasă în comparaţie cu teoria tipurilor.

În fine, o altă obiecţie a fost făcută de Ackermann [1] care remarcă că observaţia lui Behmann asupra semnelor abreviative nu este suficientă, deoarece se pot obţine paradoxe numai cu ajutorul cuvintelor „toţi" şi „există" (operatorii de generalizare şi de existenţă), adică independent de utilizarea vreunui semn abreviativ.

8. Soluţia lui Perelman

Perelman studiază problema antinomiilor logico-matematice din punct de vedere strict logic. El a susţinut în mod ferm că toate paradoxele sînt datorate unei greşeli de

logică pe care însă nu a putut s-o descifreze. Perelman a revenit de mai multe ori asupra afirmațiilor sale și într-o ultimă comunicare [3], prezentată de M. Barzin, găsește că mecanismul erorilor comise în paradoxe poate fi înțeles dacă aducem paradoxele la o formă comună. Această formă comună este următoarea:

$$(x) \cdot \sim xRx \equiv xRa$$

Adică: dacă un individ x nu are relația R cu el însuși, aceasta înseamnă că el are relația R cu o anumită entitate *a*. Această echivalență fiind valabilă pentru orice x, obținem pentru x = *a*:

$$\sim aRa \equiv aRa$$

Am ajuns la o contradicție: propoziția „*a* are relația R cu *a*" echivalează cu propoziția „*a* nu are relația R cu *a*".

Examinînd acum un paradox oarecare, putem să-l reducem cu ușurință la această schemă dacă putem determina trei lucruri: cîmpul lui x, semnificația lui R și termenul a. Să luăm, de exemplu, paradoxul lui Russell, privind mulțimea mulțimilor care nu se conțin ca element. Acest paradox a fost deja prezentat. Există două feluri de mulțimi: cele care sînt propriile lor elemente și alte mulțimi, cele mai numeroase, care nu sînt propriile lor elemente. Dacă construim acum o mulțime din toate mulțimile care nu sînt propriile lor elemente, putem să ne punem și pentru ea aceeași întrebare; dacă această mulțime este unul din propriile sale elemente, în acest caz ea nu poate fi unul din elemente, deoarece nu conține decît mulțimi care nu se conțin; dacă această mulțime nu este unul dintre elementele sale proprii, atunci ea este unul din aceste elemente, conform definiției sale. Contradicția este violentă. Schema se va aplica în felul următor: cîmpul x-ilor reprezintă *mulțimile*, semnificația lui R este: *a fi element al* și, în sfîrșit, termenul *a* este *mulțimea tuturor mulțimilor care nu sînt unul din propriile lor elemente.*

Această formă comună — scrie M. Barzin în prezentarea sa la comunicarea lui Perelman — este o propoziție falsă. Este o universală, iar o universală nu este adevărată decît în cazul în care e adevărată pentru toate valorile variabilei".

Aici, este limpede că această universală nu este adevărată pentru valoarea a, căci, dacă înlocuim pe x prin a, obținem $\sim a\mathrm{R}a \equiv a\mathrm{R}a$, adică o contradicție.

Principiul contradicției interzice punerea oricărei universale, care are o contradictorie drept o valoare. Este suficient să regăsim printre premisele unui paradox o afirmație corespunzătoare schemei de mai sus pentru a-l putea înlătura.

Trebuie deci să împiedicăm ca x să ia valoarea a, într-o asemenea echivalență, ceea ce se scrie:

$$(\mathrm{x}, \text{ fără } a) \cdot \sim \mathrm{xRx} \equiv \mathrm{xR}a$$

Cu alte cuvinte, dacă există între două funcții logice oarecare $\varphi(\mathrm{x})$ și $\psi(\mathrm{x})$ o echivalență formală adevărată:

$$\varphi(\mathrm{x}) \equiv \psi(\mathrm{x})$$

ea împarte domeniul x-ilor în două clase de valori: cele care fac amîndouă funcțiile adevărate în mod simultan și cele care fac amîndouă funcțiile false în mod simultan. Cînd avem o echivalență obișnuită, această repartiție a cîmpului x-ilor exte exhaustivă, în timp ce, cînd utilizăm o echivalență cu valoare rezervată — numită de Barzin o cvasiechivalență, ca, de exemplu,

$$(\mathrm{x}, \text{ fără } a) \cdot \sim \mathrm{xRx} \equiv \mathrm{xR}a$$

domeniul x-ilor este încă împărțit în două clase, dar termenul a nu mai figurează în clasificare. Nu mai avem o birepartizare exhaustivă.

Astfel, Perelman ajunge la o regulă prohibitivă care nu ajută rezolvarea problemei: pentru a nu ajunge la propozițiile contradictorii trebuie să interzicem substituirile care conduc la propoziții contradictorii!

Trebuie totuși să dăm dreptate lui Perelman care, după părerea noastră, este singurul care a avut intuiția veritabilă a mecanismului logic al paradoxelor, fără să găsească, totuși, soluția, deoarece problema este mult mai generală decît aceea pe care a pus-o el. Meritul lui Perelman este de a fi relevat trei puncte esențiale ale problemei:

1. — toate paradoxele sînt datorate unor erori de logică;

2. — universala $(x) \cdot \sim xRx \equiv xRa$ este falsă în anumite cazuri, deci ea nu este universală;

3. — principiul contradicției ne interzice să întrebuințăm orice universală care are această formă, pentru care propoziția contradictorie $\sim aRa \equiv aRa$ este o valoare.

Lucru pe care nici un alt matematician nu l-a remarcat.

Vom vedea, în cele ce urmează, că concluzia lui Perelman este absolut adevărată, că ea nu poate fi obținută atît de ușor, deoarece este un caz particular al unei concluzii mult mai generale și că nu există puncte care trebuie elucidate.

9. Teoria stratificării a lui Quine

Logisticianul american W. V. Quine a încercat să construiască un sistem logic care să înlocuiască sistemul din *Principia Mathematica*, menținînd însă toate teoremele acestui sistem. Sistemul său [1], pe care l-a formulat în 1934, s-a izbit însă de dificultăți ce au fost semnalate de alți matematicieni și logicieni, astfel că el a fost obligat să-l refacă în mai multe rînduri [2].

Teoria tipurilor este înlocuită în sistemul lui Quine prin *teoria stratificării*. În ce constă această teorie?

Să considerăm un sistem formal care conține variabilele x, y, z, ..., indiferent de tipul lor (în sensul lui Russell) și expresiile (funcțiile propoziționale), x(x), x(y), x(z),..., y(x), y(y), y(z), ..., z(x), z(y), z(z), ..., și operatorii logicii elementare. O expresie U va fi numită „stratificată" (*stratified*), dacă este posibil să numerotăm variabilele (libere sau legate), cu care este construită U, așa fel ca pentru oricare v(w) din U, variabilele v și w să aibă numere consecutive $k + 1$ și k. După cum spune Beth ([1], p. 192), Quine nu face altceva decît să acorde o poziție privilegiată expresiilor stratificate, față de cele nestratificate în raport cu postulatele pe care le admite. Se admit astfel, de la început, expresii de forma x(x), y(x), z(z), etc., dar Quine adaugă principiul abstracției (din logica lui Russell) după care clasele de abstracție nu pot fi formate decît din cele stratificate.

În felul acesta teoria tipurilor nu mai intervine direct în sistemul lui Quine, deși restricțiile impuse echivalează cu acelea pe care le exprimă teoria tipurilor. Mai mult, sistemul lui Quine nu a putut fi demonstrat ca fiind necontradictoriu, chiar sub forma perfecționată din 1943 ([3], ed. II). Quine a arătat că sistemul său perfecționat exclude și antinomia lui Burali-Forti și că permite să se fundeze aritmetica pe postulate pur logice. Cu toate acestea, nu se poate ști întrucît acest sistem evită oricare paradox posibil, cu atît mai mult cu cît admite idei paradoxale, care dacă nu sînt direct contradictorii, sînt greu de admis, cum este existența unei clase universale care conține absolut orice, indivizi, clase și, mai mult, se conține singură!

10. Sistemul logic al lui Alonzo Church

Church construiește un sistem logic bazat pe o serie de postulate, între care cele mai importante se referă la uzul variabilelor reale și la principiul terțului exclus.

Mai întîi, Church [1] renunță la întrebuințarea variabilelor libere. De exemplu, identitatea algebrică

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1}$$

nu poate da o propoziție definită, dacă nu adăugăm ce valori iau variabilele a, b, c, care pot fi numere reale, complexe, sume de serii etc., și de fiecare dată substituirea unor numere date, în locul lor, ne va duce la alt înțeles.

De aceea, Church [1] crede că adiția verbală trebuie exprimată direct în formulă. În cazul nostru avem:

$$R(a)R(b)R(c) \supset_{abc} a(b + c) = ab + ac \tag{2}$$

Aici simbolul „R" înseamnă predicatul „număr real"; dacă a, b, și c sînt numere reale, pentru oricare a, b și c identitatea (1) este valabilă. În felul acesta nu mai avem variabile libere, dar simbolismul se dublează.

Church crede că nu există altă ieșire, dacă voim să fim stricți, decît abandonarea totală a variabilei libere. Se vede însă ce legătură există între această idee și paradoxe.

Într-un paradox am găsit, de exemplu, echivalența generală:

$$(\varphi) \cdot P(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi)$$

Variabila φ poate lua orice valoare și nu cere nici o indicație în ce privește entitățile logice ce i se pot substitui.

În al doilea rînd, Church introduce o restricție în legea terțului exclus. Această restricție constă în a admite axiomatic că o funcție propozițională f(x) poate să nu fie — pentru unele valori ale variabilei x — nici adevărată și nici falsă. Pentru o asemenea valoare a lui x, va trebui să presupunem că f(x) este nedefinită și nu exprimă nimic.

Trebuie să observăm, o dată cu Church ([1], p. 349), că sistemul acesta, care se constituie logic cu ideile lui primitive și axiomele lui, introducînd o restricție în legea terțului exclus, are analogii cu logica lui Brouwer-Heyting. Cele două sisteme nu sînt identice, din cauză că nu elimină aceeași parte a acestui principiu. Legea dublei negații este valabilă în logica lui Church și nu este în aceea intuiționistă.

În afară de aceasta, concepția generală despre logică este alta la Church și alta la Brouwer.

Church nu acordă un caracter de unicitate sau de adevăr absolut unui sistem de logică. Entitățile logicii formale sînt abstracții și depind de alegerea arbitrară a inventatorului. Ele servesc numai la descrierea și sistematizarea faptelor de experiență sau de observație. După cum pot exista mai multe geometrii pentru descrierea spațiului, tot astfel, crede Church, există mai multe sisteme de logică, și dintre aceste sisteme unul poate fi mai convenabil decît altul: *„but it cannot be said that one is right and the other wrong"*. Aceasta este de fapt poziția lui Poincaré în fața geometriilor neeuclidiene, și în general în fața teoriilor științifice, și este adoptată de Church și pentru logică, ca de altfel de toți acei care au creat logici polivalente, după cum am văzut: Lewis, Lukasiewicz, Heyting, Paulette Février, J. L. Destouches etc.

În consecință, logica trebuie dezvoltată în mod pur formal, fără să atribuim vreun înțeles simbolurilor.

Postulatele inițiale trebuie să definească sistemul logic ca o structură formală și, în dezvoltarea acestei structuri, referința la eventuale aplicații este irelevantă.

În ceea ce privește paradoxele, eliminarea unui număr dintre ele prin acest sistem se face, tot printr-o restricție. O restricție făcea și Russell, prin introducerea unei limitări a valorilor posibile pentru argumentul unei funcții ; Church introduce această limitare chiar prin axiomele inițiale ale sistemului logic (restricția terțului exclus). Cu toate acestea, după cum a arătat însuși Church ([1], II), sistemul său conducea la contradicții. Mai tîrziu, Church [2] a izbutit să construiască un sistem — așa-numitul calcul λ-*conversion* — liber de contradicții.

În urmă, Church [3] a construit un alt calcul funcțional, F^{ω}, care încorporează teoria tipurilor sub forma ei simplă.

11. Sistemul logic independent de teoria tipurilor al lui W. Ackermann

Lucrarea lui Ackermann se leagă de cercetările lui Behmann și Church, pe care însă le depășește. Ideea principală a lui Ackermann este stabilirea precisă a noțiunii de „expresie cu sens". Spre deosebire de Russell, care limitează valorile argumentului unei funcții prin teoria tipurilor, prin ceva exterior predicatelor înseși, Ackermann [1] limitează domeniul de valori ale unui predicat prin însăși definiția lui. În felul acesta ne întrebăm :

a) cînd o expresie fără variabilă liberă reprezintă o propoziție ?

b) cînd reprezintă o expresie cu variabile libere un predicat ?

Răspunsul îl găsim în următoarele idei, care nu sînt axiome, ci numai idei primitive :

I. O expresie $\mathfrak{A}$ fără variabilă liberă are sens cînd acceptă una dintre valorile de adevăr, adevărat sau fals.

La a doua întrebare, răspunsul este următorul : orice predicat $\mathfrak{A}$ (x) are un anume domeniu de definiție.

Dacă se substituie predicatului un lucru din acest domeniu, se naște o propoziție adevărată sau falsă, deci cu sens. Așadar :

II. O expresie cu variabile libere reprezintă un predicat cînd din ea rezultă, prin înlocuirea variabilelor, o propoziție,

adică, dacă prin substituție ea capătă valoarea „adevărat" sau „fals".

III. Există un predicat și un lucru, așa că dacă înlocuim lucrul în predicat, obținem o propoziție.

IV. Semnele abreviative nu pot fi introduse decît dacă pot fi eliminate. Aceasta este concluzia lui Behmann.

Se vede că aceste idei nu sînt suficiente pentru a stabili sensul oricărei expresii. De aceea, Ackermann introduce — și în aceasta stă importanța sistemului său — ideea de demonstrație pe care o atașează ideii de sens.

Ideea că demonstrabilitatea unei formule este o proprietate a formulei aparține lui Gödel, după cum s-a văzut.

După ce-și dă axiomele și regulile de demonstrație, Ackermann conchide:

O formulă 𝔄 fără variabilă liberă se numește o expresie — sau o propoziție, cum se spune în cazul acesta — atunci și numai atunci cînd părțile componente ale lui 𝔄 sînt părți constituente ale unei formule demonstrabile.

2. O formulă 𝔄 (x) cu o variabilă liberă se numește o expresie, atunci și numai atunci cînd (Ex). [𝔄(x)v ~ 𝔄(x)] este demonstrabilă (cînd se poate demonstra că există un x pentru expresia 𝔄 (x) este adevărată sau falsă).

Cu aceasta, Ackermann izbutește să construiască o logică, unde expresiile paradoxale nu mai pot apărea, dar nu din cauză că sînt eliminate printr-o axiomă suplimentară — cum se întîmplă, de exemplu, cu ajutorul teoriei tipurilor — ci fiindcă expresiile cu sens sînt riguros definite. Neintroducînd nici o restricție față de principiul terțului exclus, progresul este destul de important în comparație cu sistemul lui Church.

Și în acest sistem, caracterul artificial al soluției este evident. Simplul fapt că ne aranjăm ideile primitive și axiomele așa fel ca paradoxele să nu apară nu este o soluție.

12. Cercetările lui Bocivar

D.H. Bocivar [1] a dat o demonstrație a condiției formulate de Behmann. Logicianul rus construiește un sistem formal căruia nu îi atașează teoria tipurilor și care poate înlocui foarte bine sistemul din *Principia Mathematica* și

este mai simplu. Neținînd seama însă de teoria tipurilor, antinomiile apar ușor în sistemul său. Bocivar arată că apariția antinomiilor se datorește admiterii tacite sau explicite a unui postulat formal, care tocmai infirmă exigența lui Behmann. Așadar, dacă se renunță la acest postulat, sistemul formal care rămîne este lipsit de contradicție. Care este acest postulat? Dacă considerăm, în sistemul construit de Bocivar, definiția

$$F(\varphi) = \sim \varphi(\varphi) \quad \text{Def.} \qquad (1),$$

aceasta conduce imediat la paradox. Însă se derivă din (1) echivalențele:

$$(\varphi) \cdot F(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi) \qquad (2)$$

$$(\exists\psi) \cdot (\varphi) \cdot \psi(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi) \qquad (3)$$

Dacă, prin urmare, introducem definiția (1), apelăm tacit la postulatul de existență (3): „există ψ pentru care echivalența considerată este adevărată". Postulatul (3) nu e decît o formă particulară a postulatului mai general, cu mai multe variabile:

$$(\exists\psi) \cdot (\varphi_1)(\varphi_2)\ldots(\varphi_k) \cdot \psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \equiv \qquad (4)$$

$$\equiv \sim \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$$

Este evident că pentru a deriva din definiția (1) paradoxul cunoscut, admitem în mod tacit sau explicit postulatul (3) sau sub forma lui generală (4), că există ψ pentru care echivalența respectivă este adevărată. Prin urmare, dacă renunțăm la postulatul (4), ceea ce se justifică, pe baza observației lui Behmann, că nu există expresia formală a cărei abreviere este ψ, deci ψ nu satisface condiția pascaliană a definiției, antinomia lui Russell și celelalte antinomii analoge sînt eliminate.

Bocivar demonstrează că sistemul ce se obține, excluzînd din sistemul său orice aplicație a postulatului (4), este necontradictoriu, și deci observația lui Behmann este suficientă pentru a înlătura paradoxele.

13. Sistemele axiomatice ale teoriei mulțimilor

În prezența dificultăților provocate de teoria mulțimilor și, în special, provocate de antinomiile apărute în interiorul acestei teorii, matematicienii au recurs la metoda axiomatică pentru a limpezi, pe de o parte, concepțiile care stau la baza teoriei mulțimilor, iar pe de alta, pentru a separa și exclude propozițiile care duc la paradoxe. Georg Cantor acceptase noțiunile cu ajutorul cărora și-a construit teoria fără prea multe scrupule logice, creînd astfel o teorie care este numită, de atunci, teoria naivă a mulțimilor. Metoda axiomatică care separă în mod strict noțiunile primitive de noțiunile definite, axiomele unui sistem de propozițiile derivate, care distilează, pentru a spune așa, o teorie deductivă, se dovedise a fi un instrument util și fecund de cercetare prin lucrările lui Hilbert ; ea apărea deci ca cea mai indicată pentru a pune ordine într-o teorie în care dezordinea începea să se instaleze. Astfel s-au născut sistemele axiomatice ale teoriei mulțimilor. Două sisteme, care căutau să elimine paradoxele, au fost publicate în 1908, unul datorat lui Russell, celălalt, lui Zermelo.

Nu vom intra în amănuntele acestor teorii, pentru că ceea ce ne interesează este soluția logică a problemei antinomiilor și nu faptul că ea este evitată de un grup de noțiuni primitive și de axiome, ceea ce nu reprezintă o soluție logică, după cum am afirmat mai sus.

Sistemul lui Russell este bazat pe teoria tipurilor, pe care am expus-o pe larg și pe care Hao Wang [1] o prezintă ca fiind un sistem axiomatic.

Sistemul lui Zermelo [2] pleacă de la un punct de vedere complet diferit de cel al lui Russell. Autorul construiește un sistem de axiome din care putem deriva toate propozițiile teoriei mulțimilor, într-un mod formal și explicit. Dar el are nevoie și de axiome care sînt dificile de admis ca, de exemplu, axioma alegerii.

Cele două sisteme au suportat de atunci modificări și perfecționări datorate fie autorilor lor, fie lucrărilor lui Ramsey, Wittgenstein, Carnap etc. (pentru sistemul lui Russell) sau lucrărilor lui Fraenkel, Skolem, von Neumann, Bernays etc. (pentru sistemul lui Zermelo).

Care este ideea directoare a lui Zermelo? Vom cita o excelentă caracterizare a acestui sistem, dată de Hao Wang ([1], p. 15):

„Principiul central al construcției lui Zermelo pare foarte asemănător cu ideea originală prin care Cantor explică paradoxele și poate fi considerată ca fiind ceea ce Russell numește o *teorie de limitare de mărime*. Există deci anumite procedee care se reproduc și care sînt legate de anumite proprietăți, astfel că, fiind dată o clasă de termeni avînd aceste proprietăți, este întotdeauna posibil să definești un nou termen avînd și el această proprietate. Dacă vrem să conținem toți acești termeni într-o unitate închisă (o mulțime), ne izbim de contradicții care seamănă cu antinomiile lui Kant.

Remediul constă în a presupune că termenii care iau naștere printr-un astfel de procedeu nu pot forma o mulțime și în a pune anumite restricții generale asupra mărimii multiplicităților care pot fi considerate ca fiind mulțimi. Sistemul lui Zermelo oferă un enunț precis al acestor limite."

Principiul lui Zermelo, care de altfel este principiul oricărei metode axiomatice a teoriei mulțimilor, constă deci în accepta în mod inițial noțiuni și axiome alese în mod apropiat, în așa fel încît paradoxele să nu poată apărea. Ceea ce poate fi explicat mai pe scurt: *Qu'on s'arrange*!... Cea mai mare dificultate, în afară de procedeul complet convențional al „aranjamentului" și axiomele suplimentare care trebuie admise pentru a putea deriva din axiome teoremele teoriei mulțimilor, constă în a demonstra non-contradicția sistemului construit, adică exact problema care era în cauză!

Insatisfacția intelectuală pe care o resimțim față de asemenea „axiomatizări" se vădește mai ales în eforturile necontenite de perfecționare a vechilor „axiomatizări" sau de construcție de noi sisteme.

Artificiul formal al lui Zermelo, prin care el credea că evită paradoxele, este următorul: ca idei primitive ale sistemului său axiomatic, el acceptă, în mod special, două: ideea de mulțime reprezentată prin una din variabilele x, y, z, ..., și semnul „$\in$" de apartenență. Aceste idei nu sînt definite.

Altfel spus, în loc de a pleca de la indivizi, de la elementele unei mulțimi sau clase și de a forma apoi clasa respectivă, Zermelo pleacă de la ideea de clasă, ca idee primitivă, idee care trebuie supusă anumitor restricții axiomatice, în așa fel încît paradoxele să poată fi evitate. Aceste axiome sînt în număr de opt, capabile, după cum susține Zermelo, să lase în afara sistemului său paradoxele și să permită, de asemenea, deducerea tuturor teoremelor acestei teorii.

Toate aceste axiome sînt mai mult sau mai puțin îndoielnice, dar există una, *axioma mulțimii submulțimilor* care afirmă că, fiind dată o mulțime, mulțimea submulțimilor există, ceea ce este pur și simplu fals, așa cum o vom demonstra la capitolul „Concluzii" al acestei lucrări (cel puțin în această formă generală).

Ce reprezintă un asemenea sistem din punct de vedere logic? Răspunsul este formulat, într-un mod izbitor, de către Hao Wang [1]: „Asemenea modele ajută imaginația să sesizeze schema conceptuală a sistemelor formale, dar nu ne ajută în nici un fel să eliminăm aspectele îndoielnice (ca de exemplu, definițiile nonpredicative) ale teoriei mulțimilor".

Sistemul lui Zermelo a fost completat de către Fraenkel cu cea de-a noua axiomă, axioma substituției.

În sfîrșit, sistemul lui Zermelo-Fraenkel a fost perfecționat prin teoria axiomatică a teoriei mulțimilor a lui von Neumann-Bernays.

14. Alte cercetări

Am menționat principalele soluții oferite în problema paradoxelor logico-matematice; desigur, nu am putut trece în revistă toate încercările ce s-au făcut în această direcție, cum sînt cele ale lui H. Scholz, Schönfinkel, Kleene, von Neumann, Bachmann, F. B. Fitch, R. Goodstein etc., toate căutînd să introducă diverse limitări prin abandonarea teoriei tipurilor.

O altă serie de cercetări s-au îndreptat într-o altă direcție, scrutînd mai mult noțiunile care intră în jocul paradoxelor decît mecanismul lor.

În această ordine de idei, A. Reymond ([1], p. 149) distinge între noțiunea logică de mulțime și mulțimile matematice o diferență ca de la speță la gen. Fie dar, după Reymond, a, b, c, ..., noțiunile matematice și E, mulțimea lor ca fapt matematic, perceput pur și simplu. Noțiunea acestei mulțimi va fi indicată cu e și vom putea scrie:

$$E(a, b, c, \ldots, e).$$

„Paradoxul dispare — scrie Reymond — în felul acesta, căci dacă mulțimea conține propria sa noțiune ca al n-lea element, rămîne totuși o pluralitate; de fapt (E) distinctă de noțiunea acestei pluralități".

În același mod, Zaremba [1] crede că poate elimina paradoxele prin introducerea unei deosebiri între noțiunea de mulțime sau de clasă și aceea de categorie, pe care le definește de altfel destul de imprecis. Confuzia dintre aceste două noțiuni — de clasă și de categorie — ar duce, după Zaremba, la antinomii.

Examenul noțiunii de mulțime infinită a făcut să apară și alte concluzii în problema antinomiilor cantoriene. Se știe că Gauss și Poincaré afirmaseră că nu există în matematici un infinit actual, ci numai un infinit potențial. Pe baza acestei concepții se puteau înlătura mulțimile infinite și, o dată cu ele, și paradoxele corespunzătoare. Această soluție nu este însă satisfăcătoare, după cum nu este satisfăcătoare afirmația pur și simplu că dacă o mulțime duce la propoziții contradictorii ea nu există. O astfel de soluție, care eludează dificultatea, dar nu o rezolvă, a fost propusă, de exemplu, de J. König [1] și apoi, mai amplu, de Mirimanoff [1] și [2]. Aceasta este, de altfel, și concluzia lui Gonseth [1]: definițiile primitive trebuie amendate printr-o clauză accesorie, anume că nu sînt valabile decît în domeniile unde nu implică contradicție. Noțiunea de mulțime ar fi după Gonseth o noțiune „mult mai complexă, asupra căreia nu posedăm toate luminile dezirabile".

Aceste distincții nu sînt concluzii riguroase, ci numai discriminări mai mult sau mai puțin arbitrare, și deci nu pot aduce nici un progres în căutarea adevăratei soluții a paradoxelor.

Tot o astfel de distincţie face Hugo Dingler [1] între *logica pasivă* şi *logica activă*. Să scriem pe o foaie de hîrtie propoziţia „Pe această foaie de hîrtie se află o propoziţie falsă" (care e o formă a paradoxului mincinosului) dacă această propoziţie este adevărată, atunci ea este falsă şi dacă este falsă atunci ea este adevărată. Ce remarcă Dingler? O propoziţie (A), că un enunţ este fals, se bazează pe un enunţ pasiv (B). Ultimul trebuie să fie totdeauna prezent pentru ca (A) să poată fi afirmat. Dingler conchide, pe baza unei propoziţii pe care o susţine în altă parte, anume a unităţii conştiinţei şi după care este imposibil ca cele două enunţuri (A) şi (B) să existe simultan în conştiinţa noastră, că vrem să exprimăm deodată propoziţia care judecă mai înainte să putem judeca.

Într-adevăr, cînd scriem propoziţia „această propoziţie este falsă", ea este judecată critic nu după ce a fost enunţată, ci ea însăşi exprimă judecata critică asupra ei (că e falsă). Dingler conchide: „Propoziţia care urmează să fie judecată nu poate fi identică niciodată cu propoziţia care judecă". Această concluzie are raporturi directe cu teorema lui Carnap şi Tarski, că nu e posibil să se definească adevărul şi falsul în chiar sistemul (limba) în care aceste noţiuni se aplică, ci numai într-un *metalimbaj*.

Tot în sensul acesta încearcă François Moch [1] să rezolve paradoxele introducînd noţiunea de „timp logic".

Moch crede că nu putem evita paradoxele făcînd uz de o logică bivalentă şi că, în fapt, noi facem uz de o logică trivalentă a cărei a treia valoare nu a fost denumită. Această a treia valoare a propoziţiilor este denumită de Moch «*inconcevable*» care în fond este „absurdul" din logica trivalentă a d-nei Paulette Février — Destouches. Moch crede că poate scăpa de dificultăţile pe care le implică toate aceste paradoxe dînd logicianului locul lui printre propoziţii, creînd astfel un „timp logic" al fiecărei propoziţii, sau teorii; „*l'instant logique*" al unei propoziţii sau teorii va fi orice ansamblu de atitudini luate faţă de toate propoziţiile din T, dacă aceste atitudini sînt compatibile cu logica trivalentă construită de Moch. „*Les instants logiques*" variind, logicianul ştie sau nu ştie dacă va fi posibil sau imposibil să fie de acord sau să nu fie de acord cu o propoziţie dată, sau să o găsească «*inconcevable*».

Nu vom merge mai departe cu examenul diverselor variante ale acestor tentative, ca cele ale lui H. Scholz, F. Bachmann, St. C. Kleene etc. Nu era în intenția noastră de a face un istoric al problemei: am vrut numai să prezentăm problema în toată gravitatea sa și, de asemenea, prin principalele soluții încercate, în amănuntele lor, să ușurăm înțelegerea celor ce vor urma.

Pentru a conchide această expunere, vom spune că problema antinomiilor se găsește actualmente în același punct în care o lăsase Russell. După cum remarcă foarte bine A. Fraenkel [3]:

„... în stadiul actual al științei, putem cel puțin să afirmăm aceasta: în ceea ce privește rezolvarea antinomiilor logice, poziția adoptată de Russell, în primii zece ani ai acestui secol, nu ar putea fi considerată ca depășită".

15. Soluțiile logicienilor scolastici

Am dori să atragem, în mod succint, atenția asupra soluțiilor date de logicienii Școlii în problema paradoxelor cunoscute de ei și care conțin observații foarte interesante, pe care le vom regăsi în soluția noastră.

Două probleme au preocupat cu deosebire pe logicienii evului mediu (în această ordine de idei): 1) problema particulelor logico-gramaticale numite *Syncategoremata*; 2) problema paradoxelor numite *Insolubilia*, în centrul căreia se găsea antinomia mincinosului cu toate variantele sale.

Particulele *syncategoremata* (particule gramaticale de legătură, prepoziții, conjuncții, forme de flexiune etc.) nu au nici un sens autonom, ci numai în legătură cu concepte care au un sens independent — *categoremata*.

Toți logicienii din această epocă s-au ocupat de această problemă, care capătă treptat o importanță extraordinară devenind, de exemplu, în comentariul lui Ioannes Magistri la *Summulae* ale lui Petrus Hispanus, un tratat, despre *Syncategoremata*, al optulea tratat al lui Petrus Hispanus.

Aceste *syncategoremata* sînt, în special: *omnis, nullus, nihil, uterque, neuter, non, totus, qualislibet, quantusque, infinitus* etc.

Să considerăm una dintre aceste *syncategoremata*, de exemplu tot (= *omnis*). Petrus Hispanus constată că există o semnificație colectivă a lui *omnis*, ca în exemplul *„omnes apostoli dei sunt duodecim"*; dar există, de asemenea, un sens distributiv al lui *omnis*, mult mai interesant, care are semnificația unui mod general de a fi (*universaliter*), ca de exemplu, în propoziția cu care începe *Metafizica* lui Aristotel — *„Omnes homines naturaliter scire desiderant"*. Atunci ce semnificație are acest semn (*signum*), cuvîntul *omnis*? se întreabă Petrus Hispanus. Se vede, spune el în argumentarea *pro*, că el nu semnifică nimic, deoarece fiecare lucru este universal sau particular, dar *omnis* nu semnifică nici universalul, nici particularul. În consecință, *omnis* nu este predicabil nici pentru unul singur, nici pentru mai mulți și deci nu are nici o semnificație. Urmează apoi argumentația *contra*, după obiceiul timpului. Dacă *omnis* nu are nici o semnificație, suprimarea acestei particule sau adăugarea ei într-o propoziție nu ar putea să provoace adevărul sau falsitatea ei, deci propoziția adevărată *„animal est homo"* nu suferă nici o modificare în valoarea sa de adevăr dacă i se adaugă *omnis*; prin urmare *„omne animal est homo"* — ceea ce este fals. Soluția scolasticilor este următoarea: *omnis* nu are aici semnificația *universale*, ci *universaliter*, ceea ce face ca ermenul comun — substantivul — să reprezinte toți termenii săi inferiori; deci nu e vorba de o colecție nouă care ar fi formată prin adăugarea cuvîntului *omnis* care, în acest caz, are numai un sens *distributiv* și nu unul *colectiv*.

În același fel se rezolvă alte sofisme datorate particulelor *nullus, nihil, infinitus* etc. De exemplu, în *Logica Magna* a lui Paulus Venetus († 1428) găsim două sensuri pentru *infinitum*, unul *categorematic* iar celălalt, *syncategorematic*: *„Infinitum tenet categorematice, quando principale verbum determinare non potest; syncategorematice quando determinat"* (Infinitul este considerat în mod categorematic cînd nu poate determina verbul principal; în mod sincategorematic, cînd îl determină).

Logica contemporană s-a izbit, așa cum am văzut, de dificultăți create tocmai de cuvintele *omnis, nullus* etc., adică, în termenii actuali, de operatorii de generalizare și de existență. Problema generală a paradoxelor, așa cum

a fost formulată de Russell, constă în a şti dacă putem întotdeauna să formăm o clasă luînd particula *omnis* în toată generalitatea sa, în sensul său colectiv, ceea ce conduce în anumite cazuri la paradoxe. Această problemă este deci problema particulelor logico-gramaticale — *syncategoremata* —, căreia scolasticii i-au dat o soluţie. Dacă, de exemplu, ţinem seama de sensul distributiv al cuvîntului *infinitum* sau *omnis* în paradoxul lui Burali-Forti sau în cel al lui Cantor, aceste paradoxe nu mai pot apărea: în „seria *tuturor* seriilor ordinalelor", cuvîntul *tuturor* avînd un sens distributiv, nu mai avem o nouă serie care să definească numărul ordinal Ω; în „mulţimea tuturor mulţimilor" cuvîntul *tuturor* avînd un sens distributiv, el nu determină o nouă mulţime etc.

Dacă adîncim gîndirea scolastică, găsim că aceste *syncategoremata*, neavînd un sens autonom, primesc *sensuri accidentale* şi logicienii scolastici au exprimat în mod limpede această observaţie, lucru pe care-l apreciem ca fiind extrem de important pentru soluţia paradoxelor. Vom găsi această observaţie şi pe o altă cale. Din păcate, tratatele de logică ale scolasticilor nu ne indică cu precizie împrejurările în care apare sensul distributiv sau accidental al acestor *syncategoremata*.

Am menţionat deja cea de-a doua problemă — *Insolubilia* — şi importanţa pe care ea o are în tratatele de logică scolastice.

Printre cele 15 moduri de rezolvare a paradoxului mincinosului (şi variantele sale), citate de Paulus Venetus, găsim unele asemănătoare cu cele încercate de către logicienii contemporani. Vom examina mai de aproape o singură soluţie, cea expusă de Petrus d'Ailly (1350—1425) în *Tratatul* său despre *Insolubilia*. Autorul recunoaşte că, din atîtea soluţii oferite în problema *Insolubilia* nici una nu l-a satisfăcut. Dificultatea, pentru el, ar consta în două cauze:

1. o cauză generală a adevărului sau falsului unei propoziţii;
2. a doua, de natură specială, se referă la adevărul sau falsul propoziţiilor care au reflecţie asupra lor însăşi — *reflexionem habentiam supra se*.

În ceea ce priveşte primul punct, două lucruri sînt de văzut: mai întîi care este propoziţia — *proprie dicta* şi

care este propoziția falsă. În ceea ce privește al doilea punct, sînt, de asemenea, două lucruri de văzut: care este propoziția care are reflecție asupra ei însăși și care sînt cele corespondente care de obicei sînt numite *insolubilia* (punctul de vedere metalogic contemporan). Pentru a se putea orienta cu precizie, Petrus d'Ailly împarte propozițiile în trei categorii (diviziune care își are originea chiar în *Organon*-ul lui Aristotel și este acceptată de Occam):

1. *propositio mentalis*;
2. *propositio vocalis*;
3. *propositio scripta*.

Ultimele două categorii de propoziții sînt subordonate imediat și în mod egal primei categorii: numai *propositio mentalis*, care este deasupra diferențelor lingvistice și de expresie, are un sens esențial, care îi dă posibilitatea de a fi adevărată sau falsă. În această concepție, această *insolubilitas* nu prejudiciază cu nimica raționamentul mental, dar poate apărea în propoziții mentale improprii și, mai ales, în propozițiile scrise sau pronunțate. Soluția insolubilelor consistă atunci în observația, așa cum o rezumă foarte bine Prantl [1], „că în urma paralelizării făcute între un raționament oral (sau scris) și cel mental corespunzător, propoziția insolubilă apare, cînd adevărată, cînd falsă, ea fiind, de fapt, numai aparentă". Petrus d'Ailly afirmă direct: „Nici o propoziție mentală nu poate afirma prin ea însăși că este adevărată sau falsă" (*Nulla propositio mentalis proprie dicta potest habere reflexionem supra se ipsam*). Dar putem scrie sau pronunța orice propoziție care atribuie o valoare de adevăr unei propoziții mentale, ca de exemplu: *„Aliqua propositio mentalis est falsa"*.

Se vede deci că această soluție nu este altceva decît soluția metalogică contemporană, după care adevărul sau falsul unei propoziții nu poate fi exprimat în sistemul logic în care a fost formulată, ci într-un alt sistem logic care vorbește de propozițiile primului.

Bineînțeles, există printre cele 15 soluții ale Scolasticilor alte soluții interesante care rezolvă sofismul mincinosului *per fallaciam figurae dictionis, per fallaciam secundum non causam* etc.

Vom atrage în mod special atenția asupra celei de-a cincea soluții, după care o propoziție *insolubilă* nu spune

nimic: „*Quinta ponit, quod Socrate dicens, se ipsum dicere falsum, nihil dicit*".

Vom vedea că soluția logică a paradoxelor, așa cum o vom expune mai departe, duce finalmente la această a cincea soluție a logicienilor scolastici.

(Bochenski, în *Formale Logik*, atribuie această soluție lui Chrysippos, bazîndu-se pe un fragment al celebrului dialectician, a cărei traducere estei însă, destul de îndoielnică.)

16. Observații generale

Vom încheia expunerea noastră asupra principalelor soluții propuse în problema antinomiilor logico-matematice pe care am făcut-o cît mai succint posibil, cu observațiile următoare:

1. Toate soluțiile, chiar cînd ele derivă din considerații strict logice, au degenerat în reguli prohibitive, în limitări convenționale ale formalismului, fără nici o justificare logică.

2. Nici una din aceste soluții nu ia în considerație faptul capital că în orice paradox obținem o contradicție și că, din această cauză, principiul contradicției este compromis de către aceste probleme, cum o vom dovedi în mod direct. Ar fi trebuit urmată pista erorii pe calea principiului contradicției dacă se urmărea într-adevăr găsirea originii sale, iar nu pe calea principiului terțului exclus (un singur logician a făcut o remarcă analogă — Ch. Perelman).

3. E de presupus că dacă s-ar fi aprofundat gîndirea logicienilor scolastici s-ar fi putut descoperi mai curînd soluția contradicțiilor, dat fiind că avem astăzi mijloace logice mai precise decît cele pe care le posedau ei.

Trebuie, de asemenea, remarcat să soluția dată de Richard, recunoscută de Poincaré [1] ca fiind „soluția adevărată" și „care e adevărată și pentru celelalte antinomii", trebuia luată în serios și examinată, și ea, mai de aproape; din păcate, nimeni, afară de Poincaré, nu a acordat atenția cuvenită explicației date de Richard care, așa cum vom vedea în cele ce urmează, conține în embrion soluția veritabilă.

(Trebuie, de asemenea, menţionat Lucas de Pesloüan [1], care s-a alăturat opiniei lui Richard). Tenacitatea cu care matematicienii s-au cramponat de „insolubilitatea" paradoxelor apare cu totul inexplicabilă, cînd poziţia normală ar fi trebuit să fie căutarea cu orice preţ a unei soluţii logice, căutînd-o şi aprofundînd-o acolo unde ea se găsea, chiar sub o formă imperfectă. Este cazul soluţiilor logicienilor scolastici, al lui Richard şi Poincaré şi chiar al soluţiei embrionare a lui Perelman. Aşa cum spune Poincaré ([2], p. 137): „ ... ei (matematicienii) ar fi putut evita cu uşurinţă cursa în care au căzut; sau, mai exact, şi-au întins ei înşişi cursa în care s-au amuzat să cadă, şi încă au fost obligaţi să fie foarte atenţi pentru a nu cădea alături de cursă".

În sfîrşit, nu ne putem împiedica a face o observaţie generală relativă la un caracter general al tuturor soluţiilor.

Ribot a examinat în *Logica sentimentelor* modul în care se înlănţuiesc sentimentele şi acţiunile corespunzătoare în cazurile în care logica nu funcţionează după regulile sale normale.

Aşa cum remarcă L. Couturat [1], e mai puţin vorba de o logică a sentimentelor cît de o *ilogică* a lor. În logica obişnuită se pleacă de la premise şi se ajunge, conform legilor raţionamentului, la concluzie, sau, dacă concluzia pare problematică, se caută justificarea ei şi deducerea ei din premisele deja recunoscute ca fiind adevărate. „În logica sentimentelor — scrie Couturat —, dimpotrivă, concluzia este determinată de la început, ea este dorită, voită şi crezută în virtutea motivelor anterioare demonstraţiilor logice, motive chiar mai puternice decît demonstraţiile; se pleacă întotdeauna de la concluzie şi se caută premisele prin care ea poate fi justificată". Cu alte cuvinte, nu premisele sînt cele care transmit adevărul concluziei, ci, de data aceasta, concluzia face ca premisele să fie adevărate. Analogia dintre procedeul logico-sentimental, descris de Ribot, şi procedeul logicienilor care caută totdeauna axiome sau premise capabile să elimine o concluzie paradoxală ne apare izbitoare. În acest caz, de asemenea, se pleacă de la o concluzie voită, dorită, aceea de a evita paradoxele, şi se caută premisele care ne-ar putea da un sistem logic lipsit de contradicţie.

V

CONSTRUCŢIA UNOR NOI PARADOXE

Pentru a explicita mecanismul logic real al paradoxelor vom construi o serie de paradoxe noi, de un tip mai general decît cele cunoscute pînă acum.

g. Paradoxul compatibil-incompatibil

Să considerăm toate predicatele şi să le scriem într-o ordine oarecare, de exemplu, în ordinea lexicografică (într-o limbă la alegere), numerotîndu-le în această ordine: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Să considerăm din nou aceleaşi predicate şi să le scriem în altă ordine, de exemplu, în ordinea lexicografică a terminaţiilor (sau altfel, prin permutări determinate în prima serie); le vom numerota în această ordine: $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$. Amîndouă seriile fiind formate din acelaşi număr de predicate, se poate stabili o corespondenţă biunivocă între predicatele din prima serie şi cele din a doua serie: fiecărui predicat dintr-un rang determinat al primei serii îi corespunde un predicat de acelaşi rang din a doua serie, şi numai unul, şi invers. Dacă un predicat dintr-un rang dat din prima serie acceptă ca predicat predicatul de acelaşi rang al seriei a doua, vom spune că primul predicat are proprietatea de a fi *compatibil* cu al doilea; în caz contrar, vom spune că el este *incompatibil*. În condiţiile definite mai sus, fiecărui predicat dintr-un rang dat, din prima serie, îi convine ca predicat predicatul de

același rang din a doua serie, sau nu îi convine, *tertium non datur*: orice predicat este *compatibil* sau nu este *compatibil*, a treia posibilitate nu există. De exemplu, să presupunem că predicatele care corespund în rangurile p, q, și r, în cele două serii ar fi următoarele:

P_1, P_2, ..., mamifer$_p$, ..., număr$_q$, ..., ordonat$_r$, ..., P_n

Q_1, Q_2, ..., metal$_p$, ..., abstract$_q$, ..., predicat$_r$, ..., Q_n

În acest caz avem: întrucît predicatul *mamifer*$_p$ nu este un *metal*$_p$, predicatul *mamifer*$_p$ este *incompatibil* cu predicatul *metal*$_p$; predicatul *număr*$_q$ este, dimpotrivă, *compatibil* cu predicatul *abstract*$_q$; predicatul *ordonat*$_r$ este, de asemenea, compatibil cu predicatul *predicat*$_r$ etc.

Dar *compatibil* și *incompatibil* sînt, chiar ele, predicate și se găsesc deci atît în prima serie, cît și în cea de-a doua. Să ne fixăm atenția la predicatul *incompatibil* pe care îl vom nota cu *Inc*. El se găsește în prima serie, într-un rang oarecare, cu un număr de ordine perfect determinat, fie *h*, deci el va fi Inc_h; în a doua serie, el se va găsi într-un alt rang, perfect determinat k, deci el va fi Inc_k (putem obține oricînd $h \neq k$, printr-o alegere convenabilă a ordinii). Avem deci următoarele două serii:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, Inc_h, \ldots, P_k, \ldots, P_n.$$

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_h, \ldots, Inc_k, \ldots, Q_n.$$

În aceste serii: $Inc_h \neq Q_h$ și $P_k \neq Inc_k$, dar $Inc_h = Inc_k$. Conform definițiilor, predicatul P_k, non-identic cu Inc_k, trebuie să fie de asemenea *compatibil* sau *incompatibil* cu Inc_k, *tertium non datur*. Dacă predicatul P_k este *compatibil* cu Inc_k = *incompatibil*, atunci el admite ca predicat, predicatul din același rang din a doua serie care este Inc_k = *incompatibil*, deci el este *incompatibil*; dacă predicatul P_k este *incompatibil*, el admite ca predicat predicatul Inc_k = *incompatibil* care este predicatul aceluiași rang din a doua serie, deci el este *compatibil*. Antinomia este izbitoare.

Se recunoaște imediat că paradoxul lui Russell, format cu predicatele *predicabil* — *impredicabil*, este un caz particular al acestei antinomii, cînd cele două serii de predi-

cate au fost ordonate în mod identic, după un singur și același criteriu. În acest caz, *incompatibil* devine *impredicabil* = Imp_h și h = k:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ Imp_h,\ \ldots,\ P_n.$$
$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ Imp_h,\ \ldots,\ P_n.$$

Enunțul problemei devine acum: dacă un predicat dintr-un rang dat, din prima serie, admite ca predicat predicatul din același rang, din a doua serie, care este el însuși, atunci predicatul considerat are proprietatea *predicabil* (adică este *compatibil* cu el însuși), și dacă nu admite acest predicat (adică este *incompatibil* cu el însuși), el este *impredicabil*. Dacă această problemă se pune pentru predicatul *impredicabil*, obținem: dacă predicatul *impredicabil* este *predicabil*, el este *impredicabil*; dacă predicatul *impredicabil* este *impredicabil*, el este *predicabil*.

Paradoxul *compatibil — incompatibil* arată că problema este mai vastă și că ea nu apare numai în raport cu aplicarea unei proprietăți ei însăși, cum credea Russell; în cazul antinomiei construite de noi ajungem la paradox, considerînd un predicat P_x complet diferit de *incompatibil*, care, dacă are o proprietate, nu o are, și dacă nu are o proprietate, o are.

În simboluri, paradoxul se prezintă în felul următor. Enunțul problemei, în cadrul definit, este: „Dacă P_x nu are predicatul Q_x, atunci P_x are predicatul *incompatibil* = = $Inc_h = Inc_k$". Această definiție se scrie deci:

$$Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x) \qquad \text{Def.}$$

Această definiție fiind valabilă pentru orice P_x, ajungem la echivalența generală:

$$(P_x) \cdot Inc_h(P_x) \equiv \sim Q_x(P_x) \qquad (1)$$

Pentru rangul determinat x = k, adică făcînd ca predicatul P_x să ia valoarea determinată P_k, atunci cînd $Q_x = P_k = Inc_k$, obținem paradoxul:

$$Inc_h(P_k) \equiv \sim Inc_k(P_k) \qquad (2)$$

Sau, din moment ce $Inc_h = Inc_k = incompatibil$, putem scrie simplu:

$$Inc(P_k) \equiv \sim Inc(P_k) \qquad (3)$$

Propoziția „predicatul P_k este *incompatibil*" este echivalentă cu propoziția „predicatul P_k nu este *incompatibil*".

După cum am văzut, paradoxul lui Russell este un caz particular al acestui paradox. Dacă în definiția dată scriem $P_x = Q_x$ (cele două serii sînt identic ordonate), atunci cînd $Inc_h = Inc_k = Imp = impredicabil$, obținem:

$$Imp(Q_x) = \sim Q_x(Q_x) \qquad \text{Def.}$$

Echivalența (1) devine astfel:

$$(Q_x) \cdot Imp(Q_x) \equiv \sim Q_x(Q_x) \qquad (1')$$

Pentru valoarea particulară $Q_x = Imp$. avem paradoxul lui Russell, *predicabil — impredicabil*

$$Imp(Imp) \equiv \sim Imp(Imp) \qquad (2')$$

2. Paradoxul izonom-heteronom

Vom construi acum o antinomie analogă celei a lui Grelling-Nelson, considerînd cuvintele și proprietățile lor. Vom proceda exact ca mai sus și vom scrie toate cuvintele unei limbi date în două serii diferite; de exemplu, prima serie de cuvinte va fi seria lexicografică normală, iar a doua, va fi seria lexicografică determinată de terminațiile cuvintelor (sau altfel, prin permutări bine determinate în prima serie). Se poate stabili o corespondență biunivocă între termenii celor două serii: fiecărui cuvînt dintr-un rang dat, din prima serie, îi corespunde un cuvînt și numai unul de același rang, din a doua serie, și invers. Dacă un cuvînt dintr-un rang dat, din prima serie, admite proprietatea exprimată prin cuvîntul de același rang din a doua serie, vom spune că el are proprietatea *izonom*, în caz contrar, vom spune că are proprietatea *heteronom*. De

exemplu, în rangurile p, q, și r s-ar putea găsi cuvintele următoare, în ambele serii (pe care le vom nota C_1, C_2 ..., C_n și D_1, D_2, ..., D_n):

C_1, C_2, ..., marsupial_p, ..., pol_q, ..., vertebrat_r, ..., C_n.

D_1, D_2, ..., polisilabic_p, ..., lung_q, ..., simbol_r, ..., D_n.

În acest caz, cuvîntul *marsupial*$_p$, fiind polisilabic, este *izonom*; cuvîntul *pol*$_q$, nefiind lung, este *heteronom*, cuvîntul *vertebrat*$_r$, fiind un simbol al conceptului vertebrat, este *izonom* etc.

În cadrul definițiilor noastre, orice cuvînt dintr-un rang dat, din prima serie, admite ca predicat proprietatea exprimată de cuvîntul cu același rang, din a doua serie, sau nu o admite, o a treia posibilitate nu există, orice cuvînt este *izonom* sau *heteronom*, *tertium non datur*.

Cuvintele *izonom* și *heteronom* se vor așeza și ele în ranguri bine determinate; în mod special, cuvîntul *heteronom* va avea, în prima serie, un rang h unde îl vom scrie *Het*$_h$, și în a doua serie, un rang k unde îl vom scrie Het_k (putem să obținem oricînd $h \neq k$, printr-o alegere convenabilă a ordinii stabilite) Cele două serii de cuvinte sînt deci:

C_1, C_2, C_3, ..., Het_h, ..., C_k, ..., C_n.

D_1, D_2, D_3, ..., D_h, ..., Het_k, ..., D_n.

Paradoxul apare imediat cînd punem aceeași problemă pentru cuvîntul C_k: cuvîntul C_k (oricare ar fi el) este sau *izonom* sau *heteronom*, *tertium non datur*. Dacă C_k este *izonom*, C_k admite proprietatea exprimată de cuvîntul din același rang, din a doua serie, Het_k = *heteronom*, deci el este *heteronom*; dacă C_k este *heteronom*, atunci proprietatea sa este tocmai proprietatea exprimată de cuvîntul de același rang, Het_k = *heteronom*, din a doua serie, deci el este *izonom*. Paradoxul este flagrant.

Este evident că paradoxul lui Grelling-Nelson este un caz particular al acestui paradox, cînd ambele serii de cuvinte au fost ordonate după un singur și același criteriu

(cele două serii sînt identice). În acest caz, *izonom* devine *autologic* și *heteronom* devine *heterologic*:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ Het_h,\ \ldots,\ C_n.$$
$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ Het_h,\ \ldots,\ C_n.$$

Definiția generală devine acum: dacă un cuvînt oarecare C_x din prima serie admite proprietatea exprimată de cuvîntul C_x de același rang din a doua serie, adică de el însuși, C_x este *autologic* și, în caz contrar, el este *heterologic*.

Punînd problema pentru *heterologic* = Het_h, obținem: dacă *heterologic* este *heterologic*, el este *autologic*; dacă *heterologic* este *autologic*, el este *heterologic*.

Această antinomie arată, ca și cea precedentă, că contradicția nu apare în raport cu aplicarea unei proprietăți exprimate de un cuvînt, cuvîntului însuși cum credeau Russell și toți logicienii de pînă acum, pentru că ei nu au cunoscut decît forma particulară a acestui paradox; paradoxul construit de noi arată că se ajunge la o contradicție considerînd un cuvînt C_k (oricare ar fi el) total diferit de *heteronom* și care, dacă are o proprietate, nu o are, iar dacă nu are o proprietate, o are.

În simboluri, paradoxul se prezintă în felul următor. Vom nota un cuvînt oarecare prin «C_x» și proprietatea exprimată de el, prin C_x. Definiția paradoxului *izonom — heteronom* se scrie:

$$Het_h(«C_x») = \sim D_x(«C_x») \qquad \text{Def.}$$

De unde echivalența generală:

$$(«C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim D_x(«C_x») \qquad (1)$$

Pentru valoarea particulară x = k, atunci cînd argumentul «C_x» devine «C_k», și D_x devine Het_k, avem contradicția:

$$Het_h(«C_k») \equiv \sim Het_k(«C_k») \qquad (2)$$

Dar pentru că $Het_h = Het_k$ = *heteronom*, putem scrie direct:

$$Het_h(«C_k») \equiv \sim Het_h(«C_k») \qquad (3)$$

Propoziția „cuvîntul C_x este *heteronom*" este echivalentă cu propoziția „cuvîntul C_x nu este *heteronom*", ceea ce este absurd.

Paradoxul lui Grelling-Nelson este un caz particular al acestui paradox, cînd ambele serii de cuvinte au fost ordonate după un același criteriu. Dacă în definiția de mai sus scriem $C_x = D_x$ (cuvintele cu același rang, din cele două serii, sînt identice) și, în acest caz, $Het_h = Het_k =$ *heteronom* $=$ *heterologic* $= Het$, obținem:

$$Het_h(«C_x») = \sim C_x(«C_x») \qquad \text{Def.}$$

Echivalența generală (1), sau ceea ce derivă din această ultimă definiție, este:

$$(«C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim C_x(«C_x») \qquad (1')$$

Pentru $«C_x» = «Het_h»$, obținem paradoxul lui Grelling-Nelson:

$$Het_h(«Het_h») \equiv \sim Het_h(«Het_h») \qquad (2')$$

3. **Paradoxul clasei claselor incompatibile**

Să considerăm cele două serii de predicate, așa cum au fost definite în paradoxul *compatibil — incompatibil*. O clasă fiind extensiunea unui predicat, aceste două serii de predicate determină două serii de clase pe care le vom nota respectiv:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_n.$$

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3, \ \ldots, \ \beta_n.$$

Corespondența biunivocă a termenilor acestor serii se menține.

Putem să exprimăm acum paradoxul *compatibil — incompatibil* în termeni de clasă. Dacă o clasă dintr-un rang dat α_x aparține ca membru clasei cu același rang β_x, din a doua serie, vom spune că clasa α_x este *compatibilă* cu β_x; dacă clasa α_x nu este membru al clasei β_x, vom spune că clasa α_x este *incompatibilă* cu clasa β_x. Referindu-ne la

exemplele date în paradoxul *compatibil-incompatibil*, putem, de exemplu, să avem, eventual, cazurile următoare:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \text{Cls } mamifer_p, \ldots, \text{Cls } număr_q, \ldots \alpha_n.$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \text{Cls } metal_p, \ldots, \text{Cls } abstract_q, \ldots, \beta_n.$$

În acest caz avem: deoarece clasa *mamifer*$_p$ nu este un membru al clasei *metal*$_p$, clasa *mamifer*$_p$ este *incompatibilă* cu clasa *metal*$_p$; clasa *număr*$_q$ este un membru al clasei *abstract*$_q$, deci ea este *compatibilă* cu aceasta din urmă etc.

Predicatul *compatibil* determină o clasă G, clasa tuturor claselor *compatibile*; predicatul *incompatibil* determină o altă clasă Γ, clasa tuturor claselor *incompatibile*. Aceste clase se găsesc și ele printre clasele celor două serii.

În mod special, clasa Γ ia locul predicatului Inc_h în prima serie, deci ea va fi Γ_h, și va fi Γ_k în a doua serie, în locul predicatului Inc_k:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \Gamma_h, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_h, \ldots, \Gamma_k, \ldots, \beta_n.$$

(În aceste serii, $\Gamma_h = \Gamma_k$, dar $h \neq k$).

În condițiile definite, orice clasă α_x de un rang dat a primei serii aparține ca element clasei de același rang β_x a seriei a doua, sau nu îi aparține, o a treia posibilitate nu există; orice clasă α_x este membru al lui β_x, sau nu este, *tertium non datur*. Paradoxul apare imediat, dacă punem aceeași problemă pentru clasa $\alpha_k \neq \Gamma_k$: clasa α_k este *compatibilă* sau *incompatibilă*, ea aparține sau nu aparține clasei Γ_k, *tertium non datur*.

Dacă α_k aparține clasei Γ_k, ea aparține clasei de același rang a seriei a doua, deci, prin definiție, nu aparține clasei Γ_k; dacă α_k nu aparține clasei Γ_k, ea nu aparține clasei din același rang al seriei a doua, deci ea aparține, prin definiție, clasei Γ_k. Paradoxul este izbitor.

Este evident că paradoxul lui Russell, al clasei claselor care nu își aparțin ca element, este un caz particular al acestui paradox, cînd cele două serii de predicate, și în consecință, cele două serii de clase au fost ordonate după aceleași criterii. În acest caz, G devine clasa claselor care își aparțin ca element și Γ clasa claselor care nu își aparțin ca element.

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \Gamma_h, \ldots, \alpha_n.$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \Gamma_h, \ldots, \alpha_n.$$

Punînd aceeaşi problemă pentru Γ_h, avem: dacă clasa Γ_h îşi aparţine ca element, ea nu poate să-şi aparţină ca element; dacă clasa Γ_h nu îşi aparţine ca element, ea îşi aparţine ca element.

La fel ca în paradoxele precedente, contradicţia nu apare în raport cu faptul că o clasă îşi aparţine sau nu ca element, că ea este sau nu *compatibilă* cu ea însăşi aşa cum credea Russell, pentru că el a întîlnit acest paradox sub forma lui particulară; paradoxul apare şi atunci cînd examinăm o clasă α_k (oricare ar fi ea), total diferită de Γ_k, ceea ce demonstrează că nodul problemei se găseşte în alt punct decît în acela indicat de Russell.

Exprimat în simboluri, paradoxul se prezintă astfel: definiţia lui Γ_h este:

$$\alpha_x \in \Gamma_h = \sim (\alpha_x \in \beta_x) \qquad \text{Def.}$$

„Dacă α_x nu este un membru al clasei β_x de acelaşi rang din a doua serie, α_x aparţine clasei Γ_h".

De unde echivalenţa generală:

$$(\alpha_x) \cdot \alpha_x \in \Gamma_h \equiv \sim (\alpha_x \in \beta_x) \qquad (1)$$

Pentru rangul particular $x = k$, cînd $\alpha_x = \alpha_k$ şi $\beta_x = \beta_k = \Gamma_k$, obţinem paradoxul:

$$\alpha_k \in \Gamma_h \equiv \sim (\alpha_k \in \Gamma_k) \qquad (2)$$

Sau, pentru că $\Gamma_h = \Gamma_k = \Gamma$, „clasa claselor *incompatibile*", putem scrie în mod simplu:

$$\alpha_k \in \Gamma \equiv \sim (\alpha_k \in \Gamma) \qquad (3)$$

Paradoxul lui Russell este un caz particular al acestui paradox, după cum am văzut, cînd cele două serii de clase (sau de predicate) au fost identic ordonate. Să facem în definiţia paradoxului general, ca şi cu echivalenţa (1) $\alpha_x = \beta_x$ (clasele de acelaşi rang sînt identice):

$$\alpha_x \in \Gamma_h = \sim (\alpha_x \in \alpha_x) \qquad \text{Def.}$$

$$(\alpha_x) \cdot \alpha_x \in \Gamma_h \equiv \sim (\alpha_x \in \alpha_x) \qquad (1')$$

Pentru $x = h$, cînd α_h devine $\Gamma_h = \Gamma$, obţinem paradoxul lui Russell:

$$\Gamma \in \Gamma \equiv \sim (\Gamma \in \Gamma) \qquad (2')$$

4. Paradoxul izomorf-heteromorf

Să considerăm primele n numere naturale. În mod normal, ele sînt scrise în ordinea mărimii lor: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n.

(Vom opri seria la numărul determinat n, necesar în problema care urmează).

Să considerăm de asemenea numele lor, într-o limbă dată, de exemplu, în română: unu, doi, trei, patru, ...

Să aranjăm acum aceste numere nu în ordinea mărimii lor, ci în ordinea lexicografică dată de numele lor în limba aleasă (sau cu totul altfel, prin permutări determinate în prima serie, ceea ce este realizabil, întrucît seria este finită). Vom nota numerele, în această ultimă ordine, în felul următor:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Avem aceeaşi serie de numere naturale, dar rangul fiecărui număr nu mai este egal cu valoarea numărului din acest rang, $a_n \neq n$.

Să examinăm de asemenea, predicatele numerelor reale; le vom aranja în acelaşi fel, într-o ordine oarecare, de exemplu în ordine lexicografică, adică în ordinea în care ele să găsesc în dicţionarul limbii alese: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Fiecărui predicat de număr dintr-un rang dat P_x, îi corespunde un număr şi, numai unul, a_x, din seria lexicografică a numerelor, care are acelaşi rang, dar inversul nu este valabil; corespondenţa este univocă de la predicate la numere. Predicatului dat P_x îi corespunde un număr a_x, şi numai unul, şi avem $a_x \neq x$ (putem să obţinem oricînd $a_x \neq x$, prin alegerea convenabilă a ordinii).

Vom pune acum problema: dacă alegem un predicat determinat P_x din prima serie, numărul corespunzător din a doua serie a_x, de acelaşi rang, va avea acest predi-

cat sau nu? Răspunsul este o tautologie: numărul a_x are, sau nu are, predicatul de număr P_x *tertium non datur*.

Dacă a_x admite ca predicat predicatul din acelaşi rang P_x, vom spune că a_x are proprietatea *izomorf*; în caz contrar, vom spune că a_x este *heteromorf*. În virtutea acestor definiţii, orice număr a_x care corespunde unui predicat determinat P_x este sau *izomorf*, sau *heteromorf*, o a treia posibilitate nu există.

De exemplu, dacă predicatul de număr *„prim"* ar avea ca indice 104 (P_{104} = prim) şi numărul corespunzător ar fi $a_{104} = 504$, numărul 504, nefiind prim, ar fi *heteromorf*; dacă am avea predicatul P_{71} = „pătrat perfect" şi numărul corespunzător $a_{71} = 625$, întrucît $625 = 25^2$, numărul $a_{71} = 625$ ar fi *izomorf* etc.

Predicatele *izomorf* şi *heteromorf* sînt, ele înşile, predicate de numere şi, în consecinţă, se găsesc în ranguri bine determinate în seria lexicografică a predicatelor. Să luăm în discuţie predicatul *heteronom* pe care îl vom nota *Het*: el va avea un rang determinat h, căruia îi va corespunde un număr perfect determinat $a_h \neq h$, situat în acest rang prin numele său lexicografic:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, Het_h, \ldots, P_n.$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_h, \ldots, a_n.$$

Conform definiţiilor noastre, numărul a_h este *izomorf* sau *heteromorf*, *tertium non datur*.

Dacă numărul a_h este *izomorf*, el admite ca predicat predicatul de acelaşi rang Het_h = *heteromorf*, deci el este *heteromorf*; dacă a_h este *heteromorf*, el admite ca predicat predicatul din acelaşi rang Het_h = *heteromorf*, deci el este *izomorf*. Paradoxul este flagrant.

Interesant în acest caz este faptul că numărul a_h nu este rangul predicatului Het_h: oricare ar fi el, numărul a_h nu poate să fie nici *izomorf* nici *heteromorf*. Nu se aplică o proprietate din rangul h chiar numărului h, ci unui număr complet diferit de h, $a_h \neq h$.

Paradoxul lui Richard, aşa cum a fost prezentat de Carnap [3], este un caz particular al acestui paradox. Am mai văzut că paradoxul lui Richard poate fi obţinut mult mai uşor decît în articolul citat de Carnap. Să conside-

răm toate predicatele de numere reale şi să le scriem, după modelul de mai sus, într-o serie oarecare, fie serie lexicografică ; să scriem, de asemenea, seria indicilor lor :

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\ n.$$

Corespondenţa dintre un predicat al aecstei serii, P_x, şi numărul corespunzător din a doua serie (de acelaşi rang) este univocă.

Dacă un număr întreg x, care este indicele unui predicat dat P_x din această serie, nu are proprietatea exprimată de acest predicat, x va avea proprietatea *richardian* ; dacă x are proprietatea P_x, el nu va fi *richardian*. Dar *richardian* este el însuşi un predicat de numere şi, în consecinţă, se va găsi în seria de predicate într-un rang determinat h, deci $richardian_n = Ri_h$. Avem cele două serii :

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\ Ri_h\ \ldots,\ P_n.$$

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots,\ h,\quad \ldots,\ n.$$

Problema devine acum : numărul h este *richardian* sau nu este *richardian* ? Dacă h este *richardian*, el nu admite proprietatea numerotată h, în speţă Ri_h = *richardian*, deci h nu este *richardian* : dacă h nu este *richardian*, el admite proprietatea numerotată h, în speţă Ri_h = *richardian*, deci h este *richardian*.

Este evident astfel că paradoxul lui Richard, aşa cum a fost formulat mai sus, nu este decît un caz particular al paradoxului *izomorf — heteromorf* cînd scriem $a_x = x$, adică atunci cînd ordonăm seria numerelor naturale în ordinea mărimilor lor.

În simboluri, paradoxul se scrie în felul următor. Definiţia paradoxului *izomorf — heteromorf* este :

$$Het_h(a_x) = \sim P_x(a_x) \qquad \text{Def.}$$

„Numărul notat lexicografic cu a_x este *heteromorf*, dacă nu admite proprietatea cu indicele x, în speţă P_x". De unde, echivalenţa generală :

$$(a_x) \cdot Het_h(a_x) \equiv \sim P_x(a_x) \qquad (1)$$

Pentru valoarea particulară x = h, cînd $P_h = Het_h =$ $= heteromorf$, obținem paradoxul.

$$Het_h(a_h) \equiv \sim Het_h(a_h) \quad (2)$$

Paradoxul lui Richard, în forma simplificată pe care i-am dat-o, este un caz particular al acestui paradox pentru $a_x = x$ (seria indicilor a fost ordonată în ordinea mărimilor lor). Să scriem în definiția precedentă și în echivalența (1) $a_x = x$, cînd $Het_h = Ri_h$:

$$Ri_h(x) = \sim P_x(x) \quad \text{Def.}$$

$$(x) \cdot Ri_h(x) \equiv \sim P_x(x) \quad (1')$$

Pentru x = h obținem $P_h = Het_h =$ richardian $= Ri_h$:

$$Ri_h(h) \equiv \sim Ri_h(h) \quad (2')$$

Propoziția „h este *richardian*" este echivalentă cu propoziția *„h nu este richardian"*, ceea ce este contradictoriu.

5. Paradoxul teoriei tipurilor

Am văzut că, de exemplu, în paradoxul *compatibil — incompatibil,* oricare ar fi predicatul P_k al primei serii, căruia îi corespunde în același rang al celei de-a doua serii, predicatul *incompatibil,* P_k nu poate fi nici *compatibil,* nici *incompatibil.* Oricare înseamnă: oricare ar fi semnificația sa și oricare ar fi condiția la care e supus. Să presupunem că P_k satisface condiția cerută de teoria tipurilor și că el este de tipul imediat inferior tipului de predicat *compatibil* (operație pe care o putem face oricînd prin alegerea unei ordini convenabile), atunci P_k nu este nici *compatibil,* nici *incompatibil.*

Vom construi acum, în mod direct, o antinomie în interiorul teoriei tipurilor, prin care vom demonstra că cheia tuturor acestor contradicții se găsește în altă parte, și nu în această teorie.

Să împărțim conceptele, conform teoriei tipurilor: indivizi, concepte de tipul zero, pe care le vom nota global cu X^0, pentru a pune în evidență tipul respectiv; proprietățile indivizilor, conceptele de tipul 1, pe care le vom nota

global cu X^1 ; proprietățile proprietăților indivizilor, pe care le vom nota global cu X^2 etc. Putem să facem enumerarea lor într-o ordine oarecare, dar bine stabilită (de exemplu, ordinea lexicografică, adică ordinea în care ele se găsesc în dicționarul unei limbi date). Avem:

$$X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0, X_5^0, \ldots$$
$$X_1^1, X_2^1, X_3^1, X_4^1, X_5^1, \ldots$$
$$X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_5^2, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_1^{m-1}, X_2^{m-1}, X_3^{m-1}, X_4^{m-1}, X_5^{m-1}, \ldots$$
$$X_1^m, X_2^m, X_3^m, X_4^m, X_5^m, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nu putem presupune că toate aceste serii au același număr de predicate. Dacă un element dintr-o serie dată are un predicat, acesta trebuie să fie, conform teoriei tipurilor, de tipul imediat superior: conceptul de tipul μ nu poate avea decît predicate de tipul $\mu + 1$. În consecință, expresiile de forma $X_\beta^\mu(X_\alpha^\mu)$ sau $\sim X_\beta^\mu(X_\alpha^\mu)$ nu sînt admise și nu au nici un sens, așa cum sînt declarate de Russell, oricare ar fi valoarea lui α sau β. De exemplu, echivalența

$$(\varphi) \cdot P(\varphi) \equiv \sim \psi(\varphi)$$

trebuie să fie scrisă, în acord cu teoria tipurilor:

$$(X^\mu) \cdot P^{\mu+1}(X^\mu) \equiv \sim X^{\mu+1}(X^\mu)$$

Argumentul nu mai poate lua valoarea lui $X^{\mu+1}$ sau $P^{\mu+1}$, pentru că acestea nu sînt de tipul μ, pe care trebuie să-l aibă toate valorile argumentului. Totuși, putem construi un paradox, chiar în aceste condiții.

Fie seria conceptelor de un tip dat m, numerotate într-o ordine oarecare, de exemplu, în ordine lexicografică a unei limbi date:

$$X_1^m, X_2^m, X_3^m, \ldots, X_n^m.$$

Predicatele de tipul m — 1, cărora le convin aceste predicate, pot fi grupate după cum urmează: luăm grupul

de predicate de tipul m — 1 care au toate predicatul X_1^m; apoi grupul de predicate de tipul m — 1 care au, toate, predicatul X_2^m etc. Vom avea atîtea grupe de această specie cîte predicate de tipul m există. Să numerotăm de asemenea aceste grupe în ordinea corespunzătoare predicatelor de tipul m care au servit la definirea lor (sînt clasele determinate de predicatele de tip m) şi să punem în evidenţă tipul elementelor lor:

$$G_1^{m-1}, G_2^{m-1}, G_3^{m-1}, \ldots, G_n^{m-1}.$$

Un simbol G_p^{m-1} din această serie are semnificaţia: clasa conceptelor de tipul m — 1 care admit, toate, predicatul X_p^m. Este evident că unele dintre elementele acestor clase pot fi comune, întrucît un element oarecare al clasei G_p^{m-1} poate avea mai multe predicate de tipul m, deci el aparţine mai multor clase de acest fel.

În acest fel, există două serii avînd acelaşi număr de elemente: seria predicatelor de tipul m şi seria claselor corespunzătoare. Să păstrăm acum ordinea claselor şi să ordonăm predicatele de tipul m într-o altă serie, de exemplu tot în ordinea lexicografică, dar după terminaţiile lor (sau în altfel, prin permutări determinate în prima serie). Nici o clasă nu mai corespunde, la acelaşi rang, predicatului care a servit la construirea sa. Vom nota aceste predicate, în a doua ordine, $Y_1^m, Y_2^m, Y_3^m, \ldots, Y_n^m$. Avem deci acum două serii:

$$Y_1^m, \quad Y_2^m, \quad Y_3^m, \ldots, Y_n^m. \text{ (predicate)}$$

$$G_1^{m-1}, G_2^{m-1}, G_3^{m-1}, \ldots, G_n^{m-1}. \text{ (clase)}$$

Elementele unei clase date G_p^{m-1} nu mai au toate predicatul aceluiaşi rang Y_p^m, dar este posibil să existe elemente de G_p^{m-1} care să aibă acest predicat.

Trebuie să facem observaţia că corespondenţa rangurilor este biunivocă: unui predicat dintr-un rang dat, Y_p^m, îi corespunde o singură clasă şi numai una, G_p^{m-1}, şi reciproc. În aceste condiţii vom spune: dacă un element dat al clasei G_p^{m-1} nu admite predicatul de acelaşi rang Y_p^m al

tipului imediat superior, atunci acest element are proprietatea de a fi *congruent*; în cazul în care un element dat al clasei G_p^{m-1} nu admite predicatul Y_p^m el va fi *incongruent*. Propoziția „orice element al unei clase date G_p^{m-1} admite predicatul Y_p^m, sau nu îl admite" este o tautologie, deci este adevărată: orice element al unei clase G_p^{m-1} este *congruent* sau *incongruent, tertium non datur*.

Să notăm de asemenea elementele unei clase date, de exemplu, în ordinea lor lexicografică: pentru o clasă oarecare G_p^{m-1} elementele sale vor fi scrise g_{p1}^{m-1}, g_{p2}^{m-1}, g_{p3}^{m-1}, . . ., în care primul indice reprezintă numărul clasei și al doilea indice, numărul elementului în interiorul clasei date (într-o ordine stabilită).

Predicatul *incongruent*, fiind un predicat care se aplică elementelor tipului m—1, este de tipul m și se găsește deci în seria $X_1^m, X_2^m, \ldots, X_n^m$, la un rang dat bine determinat, fie el h. Acestui predicat îi corespunde o clasă de elemente de tip m — 1, în speță G_h^{m-1}, care admit, toate, predicatul *incongruent*; în a doua ordine a predicatelor, predicatul *incongruent* va trece într-un alt rang k, el va fi deci Y_k^m și în acest rang vom găsi în seria claselor o clasă G_k^{m-1}, diferită de clasa G_h^{m-1}. Cele două serii sînt deci:

$$Y_1^m, \quad Y_2^m, \quad Y_3^m, \ldots, \textit{incongruent}_k^m, \ldots, Y_n^m.$$

$$G_1^{m-1}, G_2^{m-1}, G_3^{m-1}, \ldots, G_k^{m-1}, \ldots, G_n^{m-1}.$$

Trebuie să remarcăm că nici una din clasele G_1^{m-1}, G_2^{m-1}, . . ., G_n^{m-1} nu este vidă. Chiar dacă ar exista clase vide, putem să facem în așa fel încît G_k^{m-1} să nu fie vidă — dacă ne interesează acest lucru — prin alegerea unei ordini convenabile.

Conform definițiilor precedente, un element oarecare din clasa G_k^{m-1}, cu notația noastră g_{kx}^{m-1}, este sau *congruent*, sau *incongruent*: g_{kx}^{m-1} admite predicatul de același rang de tipul m $\textit{incongruent}_k^m$, sau nu-l admite, *tertium non datur*. Dacă g_{kx}^{m-1} este *congruent*, el admite predicatul din același rang $Y_k^m = \textit{Incongruent}_k^m$, deci este incongruent; dacă g_{kx}^{m-1}

este *incongruent*, el admite tocmai predicatul din acelaşi rang $Y_k^m = Incongruent_k^m$, deci este *congruent*. Paradoxul este evident.

În simboluri, paradoxul are forma următoare. Definiţia „dacă un element g_{xy}^{m-1} din clasa G_x^{m-1} nu are predicatul Y_x^m, atunci elementul g_{xy}^{m-1} are predicatul *incongruent* = $= Incg_k^m$" se scrie:

$$Incg_k^m(g_{xy}^{m-1}) = \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \qquad \text{Def.}$$

Această definiţie, fiind valabilă pentru oricare g_{xy}^{m-1} şi pentru oricare clasă G_x^{m-1}, dă loc echivalenţei generale pentru toate valorile argumentului de tip $m - 1$:

$$(g_{xy}^{m-1}) \cdot Incg_k^m(g_{xy}^{m-1}) \equiv \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \qquad (1)$$

Pentru $x = k$, cînd $Y_k^m = Incg_k^m$, obţinem contradicţia:

$$(g_{ky}^{m-1}) \cdot Incg_k^m(g_{ky}^{m-1}) \equiv \sim Incg_k^m(g_{ky}^{m-1}) \qquad (2)$$

Oricare ar fi elementul g_{kx}^{m-1} al clasei G_k^{m-1}, propoziţia „g_{ky}^{m-1} admite predicatul $Incg_k^{m-1}$" este echivalentă cu negaţia ei, ceea ce este absurd.

Este evident deci că teoria tipurilor nu este suficientă pentru rezolvarea paradoxelor; ea nu este nici necesară. Se pot construi paradoxe de acest gen, respectînd cu scrupulozitate condiţiile prohibitive ale oricărei teorii asemănătoare ca, de exemplu, teoria *stratificării* a lui Quine etc.

6. **Problema paradoxelor**

Am fi putut construi şi alte paradoxe, dar cele formulate pînă acum sînt suficiente pentru a ne dezvălui mecanismul lor. În afară de aceasta, constatăm că, chiar dacă am respecta teoria tipurilor a lui Russell, nu am putea evita paradoxele construite de noi, care nu pot fi evitate, de altfel, de nici o teorie, fapt uşor demonstrabil, făcînd, de exemplu, ca, în paradoxul *compatibil-incompatibil*, predicatul P_k să îndeplinească condiţia impusă de o teorie dată.

Problema generală a paradoxelor, aşa cum a fost pusă de Russell şi de alţi logicieni, este, în esenţă, următoarea. Fiind date definiţiile de forma

$$P(\varphi) =_{Df} \varphi(\varphi) \quad \text{(a)}$$

$$P(\varphi) =_{Df} \sim\varphi(\varphi) \quad \text{(b)}$$

ele duc la echivalenţele generale (pentru toate valorile argumentelor) :

$$(\varphi) \cdot P(\varphi) \equiv \varphi(\varphi)$$

$$(\varphi) \cdot P(\varphi) \equiv \sim\varphi(\varphi)$$

Pentru valoarea particulară $\varphi = P$ aceste echivalenţe devin :

$$P(P) \equiv P(P)$$

$$P(P) \equiv \sim P(P)$$

prima fiind o tautologie iar a doua, o contradicţie.

Se obţine acelaşi lucru dacă se scriu definiţiile (a) şi (b) în extensiune (în termeni de clase) :

$$\varphi\epsilon\hat{\varphi}\,(P\varphi) =_{Df} \varphi\epsilon\hat{\varphi}\,(\varphi\varphi) \quad \text{(a')}$$

$$\varphi\epsilon\hat{\varphi}\,(P\varphi) =_{Df} \sim\varphi\epsilon\hat{\varphi}\,(\varphi\varphi) \quad \text{(b')}$$

Obţinem echivalenţele generale respective :

$$(\varphi) \cdot \varphi\epsilon\hat{\varphi}(P\varphi) \equiv \varphi\epsilon\hat{\varphi}(\varphi\varphi)$$

$$(\varphi) \cdot \varphi\epsilon\hat{\varphi}(P\varphi) \equiv \sim \varphi\epsilon\hat{\varphi}(\varphi\varphi)$$

Pentru valoarea particulară a argumentului, $\varphi = P$, se obţine o tautologie şi o contradicţie :

$$P\epsilon\hat{P}(PP) \equiv P\epsilon\hat{P}(PP)$$

$$P\epsilon\hat{P}(PP) \equiv \sim P\epsilon\hat{P}(PP)$$

Problema este deci următoarea : pentru ce în definiţiile de forma (a) sau (a') şi (b) sau (b'), ca şi în echivalenţele respective, argumentul φ nu poate lua valoarea P, pentru

că dacă ar lua-o am ajunge la paradox? De ce avem, în mod necesar, $\varphi \neq P$?

Definițiile de forma (a) sau (a') au dus la paradoxele lui Burali-Forti, Cantor, Zermelo-König și Skolem; definițiile de forma (b) sau (b') au dus la paradoxele lui Russell, Richard, Grelling-Nelson, Gödel etc. și la paradoxul mincinosului — cel mai vechi dintre toate. Soluțiile oferite pînă acum constă, după cum am văzut, în introducerea unei restricții în virtutea căreia argumentul unei funcții propoziționale f(x) nu poate lua anumite valori, așa încît formarea expresiilor de tipul $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$ nu mai este posibilă.

Analizînd paradoxele mai generale construite de noi, ale căror cazuri particulare sînt paradoxele cunoscute și devenite clasice, se impune concluzia: *apariția paradoxelor nu se datorește unei valori particulare a argumentului, ci unei valori particulare a predicatului*. Să examinăm paradoxul *compatibil — incompatibil*. Am avut definiția:

$$Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x) \qquad \text{Def.}$$

cu echivalența generală:

$$(P_x) \cdot Inc_h(P_x) \equiv \sim Q_x(P_x)$$

Pentru x = k, cînd P_x devine P_k, care poate fi orice predicat bine definit, incontestabil ca predicat, paradoxul apare: P_k (oricare ar fi el, chiar dacă este predicatul *compatibil* sau *incompatibil*, ca în paradoxul lui Russell) nu poate fi nici *compatibil*, nici *incompatibil*, cu toate că el trebuie să fie *compatibil* sau *incompatibil*, *tertium non datur*.

Putem să facem ca P_k să respecte teoria tipurilor (prin alegerea unei ordini convenabile) în raport cu predicatul Inc_k, fie el de tipul m — 1, și Inc_k de tipul m; predicatul P_k nu poate fi nici *compatibil*, nici *incompatibil*. Deci contradicția nu este provocată de valoarea argumentului care poate fi o noțiune bine definită, respectînd toate regulile prohibitive introduse pentru evitarea paradoxelor cunoscute pînă acum; contradicția este provocată de valoarea particulară a predicatului Q_k = *incompatibil*: *în paradoxele construite de noi, contradicția nu se introduce prin argument, ci prin predicatul argumentului*.

Aceeași observație este valabilă pentru toate echivalențele obținute în celelalte paradoxe. Ea este valabilă

de asemenea pentru cazurile particulare ale acestor paradoxe şi care sînt paradoxele lui Russell, Grelling-Nelson, Gödel etc.

Confuzia între argument şi predicat, în expresiile de forma $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$, a împiedicat observarea faptului că exact în acest punct intervenea eroarea, şi de aceea ea nu a putut fi sesizată. Prin paradoxele mai generale construite de noi, am dilatat, ca să zicem aşa, mecanismul logic al paradoxelor, în aşa fel încît eroarea să poată fi descoperită.

În consecinţă, dacă am putea arăta că în definiţiile generale care stau la baza paradoxelor construite de noi,

$$P(x) =_{Df} \varphi(x) \qquad (A)$$

$$P(x) =_{Df} \sim\varphi(x), \qquad (B)$$

sau în extensiune,

$$x \in \hat{x}(Px) =_{Df} x \in \hat{x}(\varphi x) \qquad (A')$$

$$x \in \hat{x}(Px) =_{Df} \sim x \in \hat{x}(\varphi x), \qquad (B')$$

există o relaţie logică $\varphi \neq P$ (între simboluri), această relaţie ar fi valabilă şi pentru formele particulare ale acestor definiţii, care se obţin pentru $x = \varphi$ şi care sînt definiţiile (a) şi (a′) sau (b) şi (b′). *Justificarea logică a unei astfel de relaţii $\varphi \neq P$ în definiţiile cele mai generale de mai sus, (A) şi (A′) sau (B) şi (B′) care intră în construcţia paradoxelor construite de noi, după cum am văzut, va fi soluţia acestor paradoxe; dar ea va fi, de asemenea, soluţia paradoxelor care sînt cazuri particulare ale acestor paradoxe şi care se bazează pe definiţiile (a) şi (a′) sau (b) şi (b′).*

Trebuie să remarcăm, de asemenea, că mecanismul logic al tuturor paradoxelor este acelaşi şi că o soluţie logică reală, dacă e valabilă pentru unul din aceste paradoxe, este valabilă pentru toate.

VI

SOLUȚIA PARADOXELOR

1. Formula Tω

În paradoxele cele mai generale, construite de noi, am avut o definiție de tipul următor:

$$P(x) = \sim \psi(x) \qquad \text{Def.}$$

cu echivalența generală

$$(x) \cdot P(x) \equiv \sim \psi(x)$$

Această echivalență este valabilă pentru orice x. Este ea valabilă pentru orice ψ? Observăm mai întîi că nu putem spune că această definiție rămîne oricînd valabilă, oricare ar fi ψ (variabil), pentru că atunci putem spune, prin definiție, pentru $\psi = P$:

$$P(x) = \sim P(x) \qquad \text{Def.}$$

ceea ce este contradictoriu: „dacă x nu are predicatul P, atunci x are predicatul P”. În consecință, într-o definiție de forma precedentă — ca și în echivalența respectivă — variabila ψ nu poate lua valoarea P, adică $\psi \neq P$.

Observăm același lucru dacă scriem această definiție în extensiune, ca și echivalența respectivă:

$$x \in \hat{z}(Pz) = \sim x \in \hat{z}(\psi z) \qquad \text{Def.}$$

$$(x) \cdot x \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}(\psi z)$$

Şi aici $\psi \neq P$, pentru că altfel am fi spus, prin definiţie, pentru $\psi = P$: „dacă x aparţine clasei determinate de funcţia P(x), x nu aparţine clasei determinate de funcţia P(x)".

Am putea spune, fiind de acord cu Perelman şi generalizînd observaţia lui, că universalele

$$(x) \cdot P(x) \equiv \sim \psi(x)$$

$$(x) \cdot x \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}(\psi z),$$

fiind false în anumite cazuri (pentru $\psi = P$), nu sînt universale, şi deci, în virtutea principiului contradicţiei, trebuie să avem $\psi \neq P$. În cazul particular studiat de Perelman, caz care are forma

$$\psi(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi),$$

nu se vede bine cum funcţionează principiul contradicţiei, cu toate că concluzia lui Perelman este irefragabilă. Dar paradoxele noastre mai generale, care sînt bazate pe definiţii mai generale, au dilatat, ca să spunem aşa, structura unei astfel de expresii, arătînd cu toată claritatea unde şi cum intervine principiul contradicţiei.

Dar noi vom proceda în alt mod.

În virtutea principiului contradicţiei, echivalenţa $\varphi(x) \equiv \sim \varphi(x)$ este totdeauna falsă, oricare ar fi x. Putem deci afirma:

$$\vdash : \sim [(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \varphi(x)] \qquad \text{(I)}$$

Să considerăm acum echivalenţa generală:

$$(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x) \qquad \text{(II)}$$

Cum am admis formula (I), această ultimă echivalenţă nu poate fi afirmată ca fiind adevărată decît dacă ea nu poate degenera niciodată în echivalenţa (I), care este falsă.

Pentru aceasta, ψ nu trebuie să fie niciodată identic cu φ şi trebuie să avem $\psi \neq \varphi$. Deci, dacă afirmăm echivalenţa

$$(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x), \qquad \text{(III)}$$

această echivalență poate să fie adevărată numai dacă $\psi \neq \varphi$. Cu alte cuvinte, echivalența (III) implică o condiție necesară: neidentitatea simbolurilor ψ și φ. Dar această condiție nu este suficientă: se poate ca simbolurile ψ și φ să nu fie identice și totuși echivalența (III) să nu fie adevărată. În adevăr, dacă avem două funcții propoziționale $\varphi(x)$ și $\psi(x)$, din faptul că simbolurile ψ și φ nu sînt identice ($\psi \neq \varphi$), nu rezultă că ele sînt echivalente și încă pentru oricare x. Relația dintre expresia $(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x)$ și expresia $\varphi \neq \psi$ este deci exact relația de implicație: nu este cazul ca $(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x)$ să fie adevărată și $\psi \neq \varphi$ să fie falsă. Dar inversa nu este valabilă: este posibil ca $\psi \neq \varphi$ să fie adevărată și $(x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x)$ să fie falsă. Am stabilit următoarea formulă, care este o implicație și pe care o vom nota cu Tω:

$$T\omega \vdash : (x) \cdot \varphi(x) \equiv \sim \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$$

Această formulă este o tautologie și se bazează exclusiv pe principiul contradicției și nu face nimic altceva decît să exprime acest principiu în cazul studiat mai sus.

Se poate vedea ușor că formula Tω este o tautologie. În adevăr, primul membru poate fi adevărat sau fals, fiind o propoziție generală (variabila x este aparentă).

Să presupunem:

1) Primul membru este fals; atunci el implică expresia $\psi \neq \varphi$, fie că aceasta este adevărată, fie că aceasta este falsă, fiindcă falsul implică orice.

2) Primul membru este adevărat; atunci $\psi \neq \varphi$ este adevărată, căci în caz contrar, dacă această expresie ar fi falsă, adică dacă $\sim \psi \neq \varphi \cdot = \cdot \psi = \varphi$, atunci în virtutea formulei (I), primul membru ar fi fals, ceea ce nu este ipoteza noastră.

Prin urmare formula Tω este o tautologie, deoarece este adevărată totdeauna.

Observăm că în formula Tω argumentul x nu este supus nici unei condiții; relația $\varphi \neq \psi$ există între simbolurile funcțiilor (sau predicatelor).

Putem să obținem forme particulare din formula Tω.

Deoarece $T\omega$ este valabilă oricare ar fi x, să facem $x = \psi$ şi obţinem:

$$T\omega_1 \vdash :(\psi) \cdot \varphi(\psi) \equiv \sim \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$$

Dacă în $T\omega$ şi $T\omega_1$ atribuim lui φ o valoare determinată $\varphi = P$, obţinem respectiv:

$$T\omega_2 \vdash : (x) \cdot P(x) \equiv \sim \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq P$$

$$T\omega_3 \vdash : (\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq P$$

În toate aceste formule argumentul nu este limitat; simbolurile predicatelor (sau funcţiilor) sînt în relaţia $\psi \neq P$. În $T\omega_1$ sau $T\omega_3$ argumentul şi funcţia sînt reprezentate prin acelaşi simbol, dar relaţia $\psi \neq P$ nu este introdusă prin ψ argument, ci prin ψ predicat. Dacă în $T\omega_2$ şi $T\omega_3$ facem $\psi = P$, avem:

$$\vdash : (x) \cdot P(x) \equiv \sim P(x) \cdot \supset \cdot P \neq P$$

$$\vdash : (P) \cdot P(P) \equiv \sim P(P) \cdot \supset \cdot P \neq P$$

Chiar şi în acest caz implicaţiile rămîn valabile, pentru că primii lor membri sînt falşi şi membrii secunzi sînt de asemenea falşi.

Se poate în mod analog să scriem formula $T\omega$ în termeni de clase, fie traducînd-o direct în termeni de clase, fie repetînd raţionamentul de mai sus:

$$T\omega \vdash :(x) \cdot x \in \hat{z}(\varphi z) \equiv \sim x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$$

Vom mai adăuga că se poate găsi o expresie mai generală încă a tautologiei $T\omega$, considerînd relaţia R (oricare ar fi) a unui simbol x cu un alt simbol φ şi a aceluiaşi simbol x cu un alt simbol ψ, adică expresiile $xR\varphi$ şi $xR\psi$. Procedînd ca mai sus, ajungem la tautologia:

$$T\omega \vdash :(x) \cdot xR\varphi \equiv \sim xR\psi \supset \cdot \psi \neq \varphi$$

Tautologia $T\omega$ a fost obţinută cu ideile de identitate (şi non-identitate), implicaţie, echivalenţă, funcţie propoziţională, clasă şi principiul contradicţiei, fără teoria tipurilor: ea aparţine sistemului *Principia Mathematica* fără teoria tipurilor (şi degajat de orice altă consideraţie care ar putea fi în opoziţie cu logica clasică). Formula $T\omega$ aparţine, de asemenea, oricărui sistem formal care admite aceste idei.

2. Soluția paradoxelor

Teorema $T\omega$ înseamnă, în fond, soluția paradoxelor. Definițiile care provoacă paradoxe, în forma lor cea mai generală, au fost exprimate sub forma tipică:

$$P(x) = \sim\psi(x) \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Scriind echivalența generală între *definiens* și *definiendum* (pentru orice x) și asociindu-i teorema $T\omega_2$ obținem un *modus ponens*:

$$\vdash : (x) \cdot P(x) \equiv \sim\psi(x) \qquad (2)$$

$$T\omega_2 \qquad \frac{\vdash : (x) \cdot P(x) \equiv \sim\psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq P}{\vdash \cdot \psi \neq P}$$

Acest *modus ponens* este valabil oricare ar fi forma particulară pe care o ia definiția (1) și deci echivalența respectivă, ca și formula $T\omega$.

Efortul lui Russell și a altor logicieni s-a îndreptat către găsirea unei justificări a faptului că, într-o definiție particulară de forma

$$P(\psi) = \sim\psi(\psi) \qquad \text{Def.} \qquad (1')$$

din care decurge echivalența generală (pentru orice ψ):

$$\vdash :(\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi), \qquad (2')$$

nu poate lua valoarea P, căci atunci ajungem la paradox:

$$\vdash \cdot P(P) \equiv \sim P(P)$$

Ținînd seama de $T\omega$ sub forma sa particulară $T\omega_3$, urmează că din definiția (1′) obținem o echivalență generală, care, împreună cu $T\omega_3$, dă un *modus ponens*:

$$\vdash : (\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi)$$

$$T\omega_3 \qquad \frac{\vdash : (\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq P}{\vdash \cdot \psi \neq P}$$

De ce argumentul ψ nu poate lua valoarea P? Din cauza existenței teoremei $T\omega$ (sau a formei sale particulare $T\omega_3$)

care explică această condiție prin relația care există între simbolurile ψ și P.

Paradoxele pe care le-am construit, *compatibil — incompatibil* etc. sau cele cunoscute de tipul *predicabil — impredicabil* etc. nu mai sînt deci posibile prin funcționarea chiar a simbolismului logic care nu permite valoarea particulară P a variabilei ψ.

Același lucru este valabil dacă scriem definițiile precedente în termeni de clase.

Avem cazul general (paradoxul clasei claselor *incompatibile*):

$$x \in \hat{z}(Pz) = \sim x \in \hat{z}(\psi z) \qquad \text{Def.}$$

Echivalența generală care rezultă și teorema Tω scrisă în termeni de clase ne dau un *modus ponens*:

$$\vdash : (x) \cdot x \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}(\psi z)$$

$$\text{T}\omega \quad \vdash : (x) \cdot x \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

$$\vdash \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

Pentru cazul particular al acestui paradox (paradoxul lui Russell), care se obține făcînd în definiția precedentă $x = \hat{z}(\psi z)$, obținem:

$$\hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(Pz) = \sim \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\psi z) \qquad \text{Def.}$$

Modus ponens respectiv devine:

$$\vdash : [\hat{z}(\psi z)] \cdot \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\psi z)$$

$$\text{T}\omega \quad \vdash : [\hat{z}(\psi z)] \cdot \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

$$\vdash \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

Paradoxul claselor *incompatibile*, ca și cazul său particular, paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu își aparțin ca element, nu poate să mai apară.

Considerînd paradoxul sub forma sa particulară, observăm că eroarea s-a comprimat, ca să spunem aşa, încît nu mai ştim unde există.

Simbolul ψ are două roluri logice: ca argument şi ca predicat. Ca argument, simbolul ψ nu apare în relaţie cu simbolul P; ca predicat, simbolul ψ este legat de P prin relaţia $\psi \neq$ P. Russell nu a putut explica cele două roluri logice distincte ale aceluiaşi simbol ψ şi a privit problema din punct de vedere exclusiv al valorilor posibile pentru argumentul ψ: întrucît ψ ca argument nu apare în relaţie directă cu predicatul P, îi era imposibil să descopere raţiunea relaţiei $\psi \neq$P, examinînd numai argumentul funcţiei $\psi(\psi)$ sau $\sim\psi(\psi)$. Aceeaşi eroare a fost comisă de toţi cei care au căutat o soluţie a paradoxelor prin limitări axiomatice, mai mult sau mai puţin arbitrare, ale valorilor admisibile pentru argumentul unei funcţii propoziţionale.

Faptul că limitarea valorilor admisibile pentru argumentul unei funcţii propoziţionale nu este soluţia paradoxelor se demonstrează prin aceea că o asemenea limitare, oricare ar fi natura ei, nu este capabilă să rezolve paradoxele generale construite de noi, sau de Gödel, şi care au o definiţie de forma

$$P(x) =_{Df} \sim\psi(x)$$

În asemenea paradoxe, numai variaţia simbolului ψ (al predicatului) provoacă paradoxul şi nu valoarea argumentului, după cum am văzut.

Am găsit astfel răspunsul logic la întrebarea următoare care a zguduit logica şi matematica şi care a dat loc aşa-numitei „crize a matematicii": de ce, într-o echivalenţă generală de forma

$$(\psi) \,.\, P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi)$$

argumentul ψ nu poate lua valoarea P? Răspunsul a fost dat mai sus.

3. Analiza paradoxelor cu ajutorul teoremei Tω

Rezultatele precedente au rezolvat complet problema paradoxelor şi natura contradicţiei pe care ele o exprimă. Vom analiza paradoxele cu ajutorul teoremei

$T\omega$, pentru a pune în evidență identitatea tuturor acestor antinomii.

1. *Paradoxul compatibil — incompatibil și cazul său particular, paradoxul predicabil — impredicabil.*

În paradoxul *compatibil — incompatibil* am avut definiția:

$$Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x) \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Această definiție dă loc unei echivalențe generale (pentru orice P_x) care, împreună cu $T\omega_1$ (unde $x = P_x$ și $P = Inc_h$), ne oferă un *modus ponens*:

$$\vdash : (P_x) \cdot Inc_h(P_x) \equiv \sim Q_x(P_x) \qquad (2)$$

$$T\omega_1 \quad \underline{\vdash : (P_x) \cdot Inc_h(P_x) \equiv \sim Q_x(P_x) \cdot \supset \cdot Q_x \neq Inc_h}$$

$$\vdash \cdot Q_x \neq Inc_h$$

Predicatul Q_x trebuie să fie non-identic cu *incompatibil*. Definițiile noastre au aranjat cele două serii de predicate în așa fel, încît Q_x să devină Inc_h = *incompatibil*, cînd se produce paradoxul. Relația $Q_x \neq Inc_h$ arată că $Inc_h = Inc_k$ nu poate fi considerat printre predicatele $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, adică în seria tuturor predicatelor. Am obținut acest rezultat pe o cale pur formală; vom arăta mai departe rațiunile acestei relații.

Pentru cazul particular al acestui paradox, paradoxul *predicabil — impredicabil*, se scrie în definiția (1) și în *modus ponens* (2), $P_x = Q_x$ (cele două serii de predicate sînt identic ordonate); în acest caz Inc_h = *incompatibil* = *impredicabil* = Imp_h:

$$Imp_h(P_x) = \sim P_x(P_x) \qquad \text{Def.} \qquad (1')$$

Modus ponens respectiv este:

$$\vdash : (P_x) \cdot Imp_h(P_x) \equiv \sim P_x(P_x) \qquad (2')$$

$$T\omega_3 \quad \underline{\vdash : (P_x) \cdot Imp_h(P_x) \equiv \sim P_x(P_x) \cdot \supset \cdot P_x \neq Imp_h}$$

$$\vdash \cdot P_x \neq Imp_h$$

Argumentul P_x nu poate fi niciodată identic cu Imp_h. Și aici, *impredicabil* nu poate fi considerat în seria tuturor predicatelor $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

2. *Paradoxul izonom — heteronom și cazul său particular, paradoxul lui Grelling-Nelson.*

Am avut definiția paradoxului *izonom — heteronom*:

$$Het_h(«C_x») = \sim D_x(«C_x») \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Modus ponens respectiv este:

$$\vdash : («C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim D_x(«C_x») \qquad (2)$$

$$\text{T}\omega \quad \frac{\vdash : («C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim D_x(«C_x») \cdot \supset \cdot D_x \neq Het_h}{\vdash \cdot D_x \neq Het_h}$$

Predicatul D_x nu poate fi identic cu Het_h.

Pentru cazul particular al acestui paradox, paradoxul lui Grelling-Nelson, se face $C_x = D_x$ (cele două serii ale cuvintelor sînt ordonate identic), cînd Het_h = heterologic = Het_h:

$$Het_h(«C_x») \equiv \sim C_x(«C_x») \qquad \text{Def.} \qquad (1')$$

Modus ponens care rezultă este:

$$\vdash : («C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim C_x(«C_x») \qquad (2')$$

$$\text{T}\omega_3 \quad \frac{\vdash : («C_x») \cdot Het_h(«C_x») \equiv \sim C_x(«C_x») \cdot \supset \cdot C_x \neq Het_h}{\vdash \cdot C_x \neq Het_h}$$

Het_h = *heteronom* sau în cazul particular *heterologic* nu poate fi o proprietate denumită printr-un cuvînt din seria tuturor cuvintelor.

3. *Paradoxul clasei claselor incompatibile și cazul său particular, paradoxul lui Russell.*

În paradoxul clasei claselor *incompatibile* avem definiția:

$$\alpha_x \in \Gamma_k = \sim \alpha_x \in \beta_x \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Echivalența respectivă cu $\text{T}\omega_1$ (scrisă în termeni de clase) ne dă un *modus ponens*:

$$\vdash :(\alpha_x) \cdot \alpha_x \in \Gamma_k \equiv \sim (\alpha_x \in \beta_x) \qquad (2)$$

$$\text{T}\omega_1 \quad \frac{\vdash :(\alpha_x) \cdot \alpha_x \in \Gamma_k \equiv \sim (\alpha_x \in \beta_x) \cdot \supset \cdot \alpha_x \neq \Gamma_k}{\vdash \cdot \beta_x \neq \Gamma_k}$$

Astfel deci, Γ_k = clasa claselor *incompatibile* nu poate fi una din clasele seriei tuturor claselor.

În cazul particular al paradoxului lui Russell, care se obține din precedentul pentru $\alpha_x = \beta_x$ (cele două serii formate cu toate clasele sînt identic ordonate), avem:

$$\beta_x \in \Gamma_k = \sim (\beta_x \in \beta_x) \qquad \text{Def.} \qquad (1')$$

Modus ponens devine:

$$\vdash : (\beta_x) \cdot \beta_x \in \Gamma_k \equiv \sim (\beta_x \in \beta_x) \qquad (2')$$

$$T\omega_3 \quad \frac{\vdash : (\beta_x) \cdot (\beta_x \in \Gamma_k) \equiv \sim (\beta_x \in \beta_x) \cdot \supset \cdot \beta_x \neq \Gamma_k}{\vdash \cdot \beta_x \neq \Gamma_k}$$

Și aici relația $\beta_x \neq \Gamma_k$, care împiedică să se producă paradoxul, spune că Γ_k nu poate fi una din clasele seriei tuturor claselor.

4. Paradoxul izomorf — heteromorf și cazul său particular, paradoxul lui Richard

Definiția paradoxului *izomorf* — *heteromorf* a fost:

$$Het_k(a_x) = \sim P_x(a_x) \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Modus ponens respectiv devine:

$$\vdash : (a_x) \cdot Het_k(a_x) \equiv \sim P_x(a_x) \qquad (2)$$

$$T\omega_1 \quad \frac{\vdash : (a_x) \cdot Het_k(a_x) \equiv \sim P_x(a_x) \cdot \supset \cdot P_x \neq Het_x}{\vdash \cdot P_x \neq Het_k}$$

Paradoxul nu se mai poate produce: Het_k nu este una din proprietățile din seria tuturor proprietăților numerelor reale.

Paradoxul lui Richard se obține pentru $a_x = x$ (numerele sînt aranjate în ordinea naturală a mărimii lor). În acest caz avem (cînd $Het_k = Ri_k$):

$$Ri_k(x) = \sim P_x(x) \qquad \text{Def.} \qquad (1')$$

Modus ponens devine acum:

$$\vdash : (x) \cdot Ri_k(x) \equiv \sim P_x(x) \qquad (2')$$

$$T\omega_3 \quad \frac{\vdash : (x) \quad Ri_k(x) \equiv \sim P_x(x) \cdot \supset \cdot P_x \neq Ri_k}{\vdash \cdot P_x \neq Ri_k}$$

Paradoxul nu mai poate apărea; Ri_k nu este una din proprietăţile seriei tuturor proprietăţilor numerelor reale.

5. Paradoxul teoriei tipurilor

Am avut definiţia:

$$Incg_k^m(g_{xy}^{m-1}) = \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \quad \text{Def.} \qquad (1)$$

Modus ponens respectiv se scrie:

$$\vdash : Incg_k^m(g_{xy}^{m-1}) \equiv \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \qquad (2)$$

$$T\omega_1 \quad \frac{\vdash : Incg_k^m(g_{xy}^{m-1}) \equiv \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \cdot \supset \cdot Y_x^m \neq Incg_k^m}{\vdash \cdot Y_x^m \neq Incg_k^m}$$

Paradoxul este imposibil. Trebuie să observăm, şi aici, că $Incg_k^m$ nu poate fi una din proprietăţile seriei tuturor proprietăţilor posibile de tipul m.

6. Paradoxul lui Gödel

Definiţia lui Gödel, a paradoxului care îi poartă numele, a fost aşa cum am văzut:

$$n \in K = \overline{Bew}[R(n); n] \quad \text{Def.} \qquad (1)$$

„Numărul natural n aparţine clasei K dacă pentru el nu este demonstrabilă formula [R(n) ; n]".

Această definiţie ne conduce la echivalenţa generală (pentru orice n):

$$\vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n) ; n]$$

Definiţia (1) este aceea a paradoxului *izomorf — heteromorf*, care este mai general decît acela al lui Richard. Pentru acest motiv, Gödel a recunoscut analogia, dar nu identitatea paradoxului său cu acela al lui Richard, întrucît el nu cunoştea paradoxul nostru *izomorf — heteromorf*. În acest caz, teorema $T\omega_1$, cu simbolurile respective ale acestei probleme, devine:

$$T\omega_1 \vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]$$

Se vede că principiul contradicţiei nu atinge variabila n, ci expresia [R(n); n], care nu poate deveni chiar [R(q); q], pentru că atunci definiţia (1) ar fi trebuit să includă propoziţia contradictorie: „Dacă $q \in K$ este adevărată, adică dacă [R(q); q] este demonstrabilă, atunci [R(q); q] nu este demonstrabilă". Avem deci *modus ponens* următor:

$$\vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \tag{2}$$

$$\frac{T\omega_1 \quad \vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]}{\vdash \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]}$$

Problema este mai generală şi, fără complicaţiile introduse de Gödel, ia forma următoare, care nu este decît una dintre formele paradoxelor noastre generale, *compatibil—incompatibil, izomorf—heteromorf* etc. Fiind dată o clasă de propoziţii K într-un formalism logic oarecare, aritmetizat, putem enunţa întotdeauna, într-un anumit mod, bine definit, o problemă de tipul următor: vom spune că o propoziţie p aparţine clasei K dacă pentru p nu este demonstrabilă afirmaţia că p aparţine unei alte clase Ψ (care poate varia într-un mod bine definit, dar, pentru fiecare p, clasa Ψ este dată). Această definiţie se scrie:

$$p \in K = \overline{Bew}(p \in \Psi) \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Echivalenţa corespunzătoare este valabilă pentru orice p:

$$\vdash : (p) \cdot p \in K \equiv \overline{Bew}(p \in \Psi) \tag{2}$$

Dar, deoarece Ψ este variabil, el ar putea deveni chiar K, așa încît definiția ar fi inclus propoziția pe care o obținem din (2) pentru $\Psi = K$:

$$\vdash : (p) \cdot p \in K \equiv \overline{Bew}(p \in K)$$

Altfel spus, dacă propoziția „p aparține clasei K" este adevărată, atunci nu este demonstrabilă propoziția „p aparține clasei K", ceea ce este contradictoriu. Vom scrie $T\omega_1$, cu simbolurile acestei probleme; echivalența (2) și $T\omega_1$ ne dau un *modus ponens*:

$$\vdash : (p) \cdot p \in K \equiv \overline{Bew}(p \in \Psi)$$

$$T\omega_1 \qquad \frac{\vdash : (p) \cdot p \in K \equiv \overline{Bew}(p \in \Psi) \cdot \supset \cdot \Psi \neq K}{\vdash \cdot \Psi \neq K}$$

Paradoxul nu mai poate apărea. Simbolul K nu reprezintă nici o clasă care să poată fi dată în formalismul logic considerat.

Observație. Am văzut că predicatele sau clasele cu care am construit paradoxele sînt excluse ca valori posibile ale predicatelor variabile sau ale argumentului variabil (în cazurile particulare ale paradoxelor) și aceasta prin funcționarea însăși a mecanismului formal logic. Concluzia care se impune imediat este aceea că aceste predicate sau clase, din moment ce nu pot fi considerate printre *toate* predicatele sau, respectiv, printre *toate* clasele, nu sînt predicate sau clase. Dar atunci ce sînt? Vom afla răspunsul acestei întrebări în partea care urmează.

4. Condițiile definiției și soluția tuturor paradoxelor

Din cele spuse mai sus am găsit soluția paradoxelor care se bazează pe o definiție de formă generală

$$P(x) =_{Df} \sim \psi(x)$$

Paradoxele *compatibil — incompatibil* (și cazul său particular, paradoxul lui Russell, *predicabil — impredicabil*), *izonom — heteronom* (și cazul său particular, paradoxul lui Grelling—Nelson, *autologic—heterologic*), *izomorf — heteromorf* (și cazul său particular, paradoxul lui Richard),

paradoxul teoriei tipurilor, ca şi paradoxul clasei claselor incompatibile (şi cazul său particular, paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu îşi aparţin ca element), ca şi paradoxul lui Gödel sînt rezolvate. Rămîne să mai găsim soluţia paradoxelor care se bazează pe o definiţie de formă generală

$$P(x) =_{Df} \psi(x)$$

şi ale căror cazuri particulare sînt paradoxele lui Burali-Forti, Cantor, Zermelo-König şi Skolem. Soluţia găsită ar fi suficientă şi pentru rezolvarea acestor paradoxe, dar vom pleca de la un alt punct de vedere, care va arunca o nouă lumină asupra soluţiei date.

Faptul cel mai neglijat de logica matematică este noţiunea de definiţie, care a fost introdusă foarte simplu prin simbolul „$=_{Df}$" pus între două expresii simbolice, cu singura specificare ca cele două expresii simbolice reprezentate, una, de termenul *definiens* (la dreapta) şi, cealaltă, de termenul *definiendum* (de stînga) înseamnă acelaşi lucru. Definiţia este o noţiune foarte delicată şi extrem de importantă atît pentru matematică, cît şi pentru filozofie.

Filozofia nu s-a putut constitui decît în momentul în care Socrate a descoperit noţiunea de definiţie. Aristotel a făcut din definiţie nervul motor al deducţiei silogistice, termenul mediu fiind o definiţie; Leibniz a conceput definiţia ca începutul şi sfîrşitul oricărei demonstraţii, o demonstraţie nefiind decît un lanţ de definiţii etc. Cu toate acestea, noţiunea de definiţie a fost acceptată în logica matematică într-o manieră vagă şi neprecisă, şi Russell a fost nevoit să conchidă: „Definiţia nu este definisabilă şi nici măcar nu este o noţiune definită".

Această lipsă de precizie a noţiunii de definiţie a provocat o serie de dificultăţi şi, cum foarte bine a remarcat Dubislav [1], nu există în teoria lui Frege o caracterizare exactă a construcţiei regulate în simboluri, a unei formule.

Vom considera ca semn al definiţiei semnul „$=_{Df}$"; acest semn nu este definit; el este o relaţie între expresia care defineşte (*definiens*) şi expresia definită (*definiendum*), relaţie care poate fi adevărată sau falsă.

Există o serie întreagă de condiţii pe care o definiţie trebuie să le îndeplinească şi pe care le găsim enumerate în orice tratat clasic de logică. O definiţie se enunţă prin *genus proximum et differentia specifica* ; definiţia trebuie să convină definitului în întregime şi numai definitului — *toti et soli definito* ; într-o definiţie este obligatoriu să se poată înlocui definitul prin definisant (condiţia pascaliană a definiţiei, care a fost utilizată de Behmann pentru a găsi o soluţie a paradoxelor, dar ea s-a dovedit insuficientă) etc.

Vom aminti aici, în mod special, două reguli fără de care nici o definiţie nu poate fi constituită.

(1) O definiţie nu trebuie să fie construită *idem per idem*, ea nu trebuie să fie tautologică ; nu se poate defini definitul prin definit — *definiendum per definiendum*. O formă mai dezvoltată a falsei definiţii *idem per idem* este *circulus in definiendo* sau *dialela* : se defineşte un lucru prin altul, dar fiecare se defineşte prin elementele celuilalt. De exemplu : „reprezentările sînt complexe de senzaţii şi ,,senzaţiile sînt complexe de reprezentări".

(2) O definiţie nu trebuie să conţină o contradicţie, în speţă, nici o *contradictio in terminis*, nici o *contradictio in adjecto*.

Să notăm *definiendum* prin D şi *definiens* prin d ; relaţia de definiţie se scrie :

$$D =_{Df} d$$

Condiţiile precedente sînt necesare, dar nu suficiente pentru ca D şi d să fie în relaţie de definiţie. Dar dacă una din aceste condiţii nu este satisfăcută, relaţia de definiţie $D =_{Df} d$ este falsă, adică este fals că expresia d este în relaţie de definiţie cu expresia D.

După această introducere, să examinăm definiţia următoare : „dacă x are predicatul ψ, atunci x are predicatul φ", sau, în simboluri :

$$\varphi(x) =_{Df} \psi(x) \qquad \text{(a)}$$

Conform condiţiei (1), această definiţie poate să nu fie falsă atîta timp cît $\psi \neq \varphi$ (condiţie necesară), altfel avem o definiţie *idem per idem*, în care definitul este definit prin definit :

$$\varphi(x) =_{Df} \varphi(x)$$

Ultima propoziție este adevărată, fiind o identitate, dar, ca definiție, ea este falsă, *tocmai pentru că este o identitate.* În consecință, în definițiile de forma (a) sîntem obligați să ținem seama de condiția (1) a definiției, de a nu defini definitul prin definit, *idem per idem*, și să conchidem că predicatele ψ și φ nu pot fi identice, deci $\psi \neq \varphi$.

În mod analog, în definiția

$$\varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x) \qquad \text{(b)}$$

sîntem obligați de condiția (2) a definiției să conchidem că predicatele ψ și φ nu pot fi identice, pentru a nu construi o definiție prin contradicție, deci $\psi \neq \varphi$. Tocmai această condiție a fost pusă în evidență de teorema Tω, pe care am obținut-o prin demonstrație.

Avem deci rezultatul următor: definițiile generale de forma (a) și definițiile generale de forma (b) implică, fiecare dintre ele, condiția $\psi \neq \varphi$, dar această relație $\psi \neq \varphi$ nu implică definiția (a) sau definiția (b) ; într-adevăr, se poate ca $\psi \neq \varphi$ să fie adevărat (cele două predicate nu sînt identice), dar funcțiile $\psi(x)$ și $\varphi(x)$ sau $\sim\varphi(x)$ să nu fie în relație de definiție, deoarece condiția este necesară, dar nu suficientă. Avem deci formulele următoare:

D_1 $\quad \vdash : \varphi(x) =_{Df} \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

D_2 $\quad \vdash : \varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

Aceste formule au fost obținute cu ideile de identitate și non-identitate, implicație, definiție și condițiile definiției, fără a ține seama de teoria tipurilor ; ele aparțin deci sistemului *Principia Mathematica* fără teoria tipurilor.

Relația $\psi \neq \varphi$ privește numai predicatele ψ și φ (funcțiile), dar argumentul nu este supus nici unei condiții.

Am discutat pe larg formula D_2 cu ocazia teoremei Tω ; formula D_1 este o tautologie, afirmație ușor de verificat dacă întocmim tabloul respectiv al valorilor de adevăr. Dar putem observa direct că: 1) dacă definiția $\varphi(x) =_{Df} \psi(x)$ este adevărată, ea îndeplinește condițiile definiției, deci $\psi \neq \varphi$ este adevărată ; 2) dacă $\varphi(x) =_{Df} \psi(x)$ este o definiție falsă, ea implică totul, deci și $\psi \neq \varphi$, fie că această ultimă relație este adevărată sau falsă.

În concluzie, dacă afirmăm o definiţie de tipul general

$$\vdash \cdot \varphi(x) =_{Df} \psi(x),$$

ea implică, în mod automat, printr-un *modus ponens*, în virtutea tautologiei D_1, relaţia

$$\vdash \cdot \psi \neq \varphi$$

Deci echivalenţa generală care rezultă de aici

$$\vdash : (x) \cdot \varphi(x) \equiv \psi(x)$$

este însoţită de relaţia (pe care o implică)

$$\vdash \cdot \psi \neq \varphi,$$

care este introdusă de chiar condiţia definiţiei.

Argumentul poate să varieze în mod arbitrar, dar funcţiile nu sînt absolut arbitrare.

Formulele D_1 şi D_2 pot fi scrise, ca şi în cazul lui $T\omega$ în termeni de clase:

D_1 $\quad \vdash : x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \quad x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$

D_2 $\quad \vdash : x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \sim x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$

Pentru φ constant, $\varphi = P$, D_1 în comprehensiune şi în extensiune devine:

D_1 $\quad \vdash : P(x) =_{Df} \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq P$

D_1 $\quad \vdash : x \in \hat{z}(Px) =_{Df} x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$

Deoarece formulele D_1 şi D_2 sînt tautologii şi deci sînt valabile oricare ar fi valorile variabilelor, să scriem $x = \psi$ şi obţinem astfel:

D_1 $\quad \vdash : \varphi(\psi) =_{Df} \quad \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

D_2 $\quad \vdash : \varphi(\psi) =_{Df} \sim \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

Dacă facem aceeaşi substituţie $x = \psi$ în formulele D_1 şi D_2 scrise în termeni de clase, obţinem:

$$\vdash : \psi \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \quad \psi \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$$

$$\vdash : \psi \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \sim \psi \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$$

Pentru $\varphi = P$ (constant) obţinem:

$$\vdash : P(\psi) =_{Df} \quad \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq P$$

$$\vdash : P(\psi) =_{Df} \sim \psi(\psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq P$$

Sau, în extensiune:

$$\vdash : \psi \in \hat{z}(Pz) =_{Df} \psi \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

$$\vdash : \psi \in \hat{z}(Pz) =_{Df} \sim \psi \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot \hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(Pz)$$

Am obţinut cu D_2 aceleaşi rezultate pe care le-am obţinut cu teorema $T\omega$. În ceea ce priveşte D_1, ea ne va dezvălui imediat natura predicatelor *compatibil, predicabil, izonom, autologic* etc. şi, de asemenea, natura clasei claselor *compatibile,* a clasei claselor care îşi aparţin ca element etc.

Să examinăm acum unul dintre paradoxele construite de noi, de exemplu, paradoxul clasei claselor incompatibile (toate paradoxele fiind de acelaşi tip). Am avut cele două serii de clase, corespunzătoare celor două serii de predicate ordonate în două moduri diferite:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \alpha_n.$$

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3, \ \ldots, \beta_n.$$

Dacă clasa α_x aparţine ca membru clasei β_x, am spus că clasa α_x este *compatibilă* şi, în cazul contrar, ea este *incompatibilă*; am considerat apoi clasa G a tuturor claselor *compatibile* şi clasa Γ a tuturor claselor *incompatibile.* Definiţia clasei G este:

$$\vdash \cdot \alpha_x \in G =_{Df} \alpha_x \in \beta_x \qquad (1)$$

Să scriem D_1 cu simbolurile acestei probleme, în termeni de clasă:

D_1 $\qquad \vdash : \alpha_x \in G =_{Df} \alpha_x \in \beta_x \cdot \supset \cdot \beta_x \neq G$

Deci definiţia (1) implică, printr-un *modus ponens*, relaţia

$$\vdash \cdot \beta_x \neq G$$

şi echivalenţa corespunzătoare definiţiei (1) este însoţită de această condiţie:

$$\vdash : (\alpha_x) \cdot \alpha_x \in G \equiv \alpha_x \in \beta_x \qquad (2)$$

$$\vdash : \beta_x \neq G$$

Aceasta demonstrează că în (1) sau în formele particulare pe care această definiţie le poate lua, ca şi în echivalenţa (2), β_x nu poate lua valoarea G, deoarece atunci definiţia iniţială ar degenera într-o definiţie *idem per idem*.

Pentru $\alpha_x = \beta_x$ (paradoxul lui Russell), cînd G devine clasa claselor care îşi aparţin ca element, obţinem:

$$\vdash \cdot \alpha_x \in G =_{Df} \alpha_x \in \alpha_x,$$

$$\vdash \cdot \alpha_x \neq G$$

Am scris definiţia: „oricare ar fi clasa α_x, dacă este membru al ei însăşi, ea este membru al clasei G". Relaţia $\alpha_x \neq G$ arată că argumentul α_x nu poate lua valoarea G. Să citim în această condiţie $\alpha_x \neq G$, în mod riguros, faptul logic pe care ea îl exprimă. Prin definiţia $\alpha_x \in G =_{Df} \alpha_x \in \alpha_x$ vrem să definim clasa G. Condiţia $\alpha_x \neq G$, impusă de D_1, arată că G nu poate fi o valoare a argumentului α_x, că G nu poate fi identic cu α_x, deci definiţia lui G nu poate fi identică cu definiţia lui α_x (oricare ar fi ea). În consecinţă, dacă nu avem o altă definiţie pentru G, alta decît definiţia unuia dintre membrii săi, G nu este definit şi expresia $\alpha_x \in \alpha_x$ nu este un termen definisant (*definiens*) pentru simbolul G. Într-adevăr, al doilea membru al definiţiei date, $\alpha_x \in \alpha_x$, este format ca definiţia clasei α_x şi cu o proprietate care decurge, pentru ea şi numai pentru ea, din propria sa definiţie, deci nu avem efectiv decît definiţia clasei α_x; condiţia $\alpha_x \neq G$ arată că expresia $\alpha_x \in \alpha_x$ formată exclusiv cu definiţia clasei α_x şi nimic altceva, nu poate să fie termen definisant pentru o altă clasă G. Faptul este evi-

dent, deoarece, dacă G are definiţia lui α_x, dacă scriem deci $\alpha_x = G$ (fără să ţinem seama de D_1), căpătăm:

$$G \in G =_{Df} G \in G,$$

relaţie care este o identitate şi deci o definiţie falsă, *idem per idem*.

Dar această concluzie nu rezultă din faptul că expresia $\alpha_x \in \alpha_x$ înseamnă „orice clasă care se conţine ca membru" şi din faptul că G ar trebui definit, în consecinţă, ca şi membrii săi; faptul logic exprimat aici este mai vast şi poate fi regăsit în alte expresii, nu numai în cele construite cu simbolul de apartenenţă.

Într-adevăr, să ne referim la simbolul de incluziune şi să construim în cadrul seriilor claselor paradoxului *compatibil — incompatibil* definiţiile următoare:

$$\alpha_x \subset G =_{Df} \alpha_x \subset \beta_x$$

$$\alpha_x \subset \Gamma =_{Df} \sim (\alpha_x \subset \beta_x)$$

Dacă nu ţinem seama de condiţiile definiţiei, putem scrie echivalenţele generale:

$$(\alpha_x) \cdot \alpha_x \subset G \equiv \alpha_x \subset \beta_x$$

$$(\alpha_x) \cdot \alpha_x \subset \Gamma \equiv \sim (\alpha_x \subset \beta_x)$$

Pentru $\alpha_x = \beta_x$, obţinem:

$$(\beta_x) \cdot \beta_x \subset G \equiv \beta_x \subset \beta_x$$

$$(\beta_x) \cdot \beta_x \subset \Gamma \equiv \sim (\beta_x \subset \beta_x)$$

Pentru $\beta_x = G$ şi, respectiv, $\beta_x = \Gamma$

$$G \subset G \equiv G \subset G$$

$$\Gamma \subset \Gamma \equiv \sim (\Gamma \subset \Gamma)$$

Ultima echivalenţă spune că propoziţia „clasa Γ este inclusă în clasa Γ" este echivalentă cu propoziţia „clasa Γ nu este inclusă în clasa Γ", ceea ce este absurd. Dar prima echivalenţă a transformat definiţia iniţială într-o definiţie *idem per idem*, şi a doua, într-o contradicţie.

În general, să presupunem că scriem definițiile următoare, în raport cu două serii de clase construite în paradoxul claselor *incompatibile*:

$$\vdash \cdot \alpha_x R\, G_h =_{Df} \alpha_x R \beta_x$$

$$\vdash \cdot \alpha_x R\, \Gamma_k =_{Df} \sim (\alpha_x R \beta_x)$$

Prima definiție enunță: „dacă clasa α_x are relația R (oricare ar fi ea) cu clasa β_x de același rang din a doua serie, atunci expresia $\alpha_x R \beta_x$ definește o altă clasă G_h cu care α_x are relația R". A doua definiție enunță: „dacă clasa α_x nu are relația R cu clasa β_x de același rang a seriei a doua, atunci expresia $\sim(\alpha_x R \beta_x)$ definește clasa Γ_k cu care α_x are relația R". Condițiile definițiilor (1) și (2) impun relația $\beta_x \neq G_h$, pentru a nu avea o definiție *idem per idem*, și $\beta_x \neq \Gamma_k$, pentru a nu avea o definiție contradictorie. Dacă nu ținem seama de aceste condiții, atunci avem echivalențele generale:

$$\vdash : (\alpha_x) \cdot \alpha_x R G_h \equiv \alpha_x R\, \beta_x$$

$$\vdash : (\alpha_x) \cdot \alpha_x R\, \Gamma_k \equiv \sim \alpha_x R \beta_x$$

Pentru $\alpha_x = \beta_x$:

$$\vdash : (\alpha_x) \cdot \alpha_x R G_h \equiv \alpha_x R \alpha_x$$

$$\vdash : (\alpha_x) \cdot \alpha_x R\, \Gamma_k \equiv \sim (\alpha_x R \alpha_x)$$

Pentru $\alpha_x = G_h$ și, respectiv, pentru $\alpha_x = \Gamma_k$, obținem:

$$\vdash \cdot G_h R G_h \equiv G_h R G_h$$

$$\vdash \cdot \Gamma_k R\, \Gamma_k \equiv \sim \Gamma_k R\, \Gamma_k$$

Am ajuns la paradoxe.

Dacă ar fi trebuit să urmărim linia lui Russell, ar fi trebuit să spunem că expresiile de forma $\alpha \in \alpha$, $\alpha \subset \alpha$ și, în general, $\alpha R \alpha$, sau sub forma negativă, $\sim (\alpha \in \alpha)$, $\sim (\alpha \subset \alpha)$ și, în general, $\sim \alpha R \alpha$, nu au sens, adică, o clasă nu ar putea avea nici o relație cu ea însăși, ceea ce este absurd și în contradicție cu faptele.

Expresiile de forma $\alpha \in \alpha$, $\alpha \subset \alpha$, și, în general $\alpha R \alpha$, sau, sub forma negativă, $\sim \alpha \in \alpha$, $\sim \alpha \subset \alpha$, și, în general, $\sim \alpha R \alpha$, formate cu definiția unei singure clase și bazate pe o

relaţie pe care această clasă ar avea-o în virtutea propriei sale definiţii exclusiv, nu sînt deci termeni definisanţi pentru nici o altă clasă G sau Γ, deoarece clasa G sau clasa Γ trebuie să aibă o definiţie care nu poate fi identică cu definiţia clasei α, sau care nu poate fi exprimată prin definiţia clasei α sau prin proprietăţile care decurg pentru α, din propria sa definiţie.

Principiul cercului vicios al lui Russell era: nici o colecţie nu poate fi definită dacă ea conţine membri care nu pot fi definiţi decît cu ajutorul colecţiei luate în totalitatea ei. Principiul este adevărat, dar el nu enunţă faptul logic general exprimat de condiţiile (1) şi (2) ale definiţiei: *definiţia unei clase α şi proprietăţile care rezultă, pentru ea şi numai pentru ea, din propria ei definiţie, nu pot fi definisante pentru nici o altă clasă G sau Γ, ci, exclusiv numai pentru α.* Faptul este evident, din moment ce, tocmai prin definiţii distingem lucrurile între ele. Iată sensul condiţiilor impuse prin regulile definiţiei, traduse prin relaţiile $\beta_x \neq G_h$ sau $\beta_x \neq \Gamma_k$, în cazurile particulare.

Acelaşi lucru este valabil pentru definiţiile în comprehensiune:

$$P(\varphi) =_{Df} \varphi(\varphi)$$
$$P(\varphi) =_{Df} \sim \varphi(\varphi)$$

Expresiile $\varphi(\varphi)$ şi $\sim\varphi(\varphi)$ nu sînt definisante, nu sînt *definientes*, pentru expresiile primului membru, pentru că definiţia unui predicat şi proprietăţile care ar decurge pentru el şi numai pentru el din propria sa definiţie nu pot să definească nici un alt predicat P, ci numai φ, ceea ce D_1 şi D_2 au impus prin relaţia $\varphi \neq P$.

Se vede acum de ce clasa tuturor claselor nu este definită: se ia noţiunea de clasă şi definiţia sa şi se pretinde ca această definiţie să definească o altă clasă, clasa tuturor claselor; dar definiţia noţiunii de clasă nu poate fi *definiens* pentru nici o altă clasă, decît pentru noţiunea de clasă, deci, dacă încercăm să definim încă o clasă cu această definiţie, realizăm o falsă definiţie *idem per idem*.

Clasa tuturor claselor nu este altceva decît extensiunea noţiunii de clasă. Acesta este motivul pentru care nu e posibil să definim clasa tuturor claselor prin noţiunea de clasă, decît printr-o definiţie *idem per idem*.

În acest fel, paradoxele lui Burali-Forti, Cantor, Zermelo-König și Skolem, care presupun clase definite încălcînd condiția (1) a definiției exprimate de D_1, sînt rezolvate.

Celelalte paradoxe au fost rezolvate prin teorema $T\omega$ sau D_2.

În consecință, elementele care lipseau din sistemul *Principia Mathematica* sau din celelalte sisteme înrudite erau tautologiile D_1 și D_2 care exprimă două condiții ale definiției și care pot fi scrise, într-un mod mai general, astfel:

D_1 $\qquad \vdash : xR\varphi =_{Df} xR\psi \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

D_2 $\qquad \vdash : xR\varphi =_{Df} \sim xR\psi \cdot \supset \psi \neq \varphi$

Aceste formule spun: *pentru ca expresiile $xR\psi$ sau $\sim xR\psi$ să fie definisante trebuie ca simbolul ψ să fie non-identic cu φ.* Mai este necesar să remarcăm că, pentru ca aceste expresii să fie definisante, trebuie ca simbolul ψ să nu presupună simbolul φ nici măcar într-un mod indirect, pentru că în acest caz am obține o definiție *idem per idem* de speța a doua, *dialela*.

Cu alte cuvinte, simbolul ψ nu poate fi definit nici el cu simboluri care servesc la definiția lui φ.

Pentru Russell, problema s-a redus la examinarea expresiilor de forma $\alpha \in \alpha$ și $\sim \alpha \in \alpha$, sau $\sim \varphi(\varphi)$ și $\varphi(\varphi)$, pe care el le-a declarat lipsite de sens, ceea ce l-a condus la teoria tipurilor. Pentru noi, clasa claselor care se conțin ca element

$$G =_{Df} \hat{\alpha}(\alpha \in \alpha)$$

sau clasa claselor care nu se conțin ca element,

$$\Gamma =_{Df} \hat{\alpha}(\sim \alpha \in \alpha)$$

și, în mod general, clasele definite în acest fel,

$$G =_{Df} \hat{\alpha}(\alpha R \alpha)$$

$$\Gamma =_{Df} \hat{\alpha}(\sim \alpha R \alpha)$$

nu sînt definite, deoarece expresiile din dreapta ale acestor definiții nu sînt termeni definisanți, fiind formate dintr-o clasă și din relația ei cu ea însăși care decurge din propria

sa definiţie. Russell a crezut că expresii ca $\alpha \in \alpha$ şi $\sim \alpha \in \alpha$ nu sînt *definite* şi nu reprezintă nimic. Dar este evident că propoziţia „predicatul mamifer nu este el însuşi un mamifer" are un sens precis, sau, în termeni de clasă, „clasa mamifer, nefiind un mamifer, nu se conţine ca element"; sensul lor nu poate fi negat, dar, pentru că sînt formate cu definiţia predicatului mamifer sau a clasei mamifer exclusiv, aceste propoziţii nu pot fi definisante pentru nici un alt predicat sau clasă, ca şi, în general, expresiile de tipul $\psi R \psi$ sau $\sim \psi R \psi$.

(Vom reveni asupra sensului expresiilor de forma $\psi R \psi$ şi $\sim \psi R \psi$ sau $\hat{\alpha}(\alpha R \alpha)$ şi $\hat{\alpha}(\sim \alpha R \alpha)$ în capitolul „Explicaţia paradoxelor".)

5. Terminus esto triplex

Am căutat soluţia paradoxelor plecînd direct de la datele problemelor enunţate în paradoxe. Am putea urma însă şi altă cale.

Se ştie că Aristotel însuşi (*Analytica priora*, I, 1) a stabilit că principiul silogismului este principiul *dictum de omni et nullo*, pe care logica scolastică il va enunţa sub forma:

Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis; *quidquid de nullo valet, nec de quibusdam vel singulis valet.* Ceea ce este afirmat (sau negat) despre tot este afirmat (sau negat) despre fiecare parte a acestui tot. Pentru silogismele în extensiune, acest principiu se aplică în mod necesar, deoarece trecerea de la specii la genuri se bazează tocmai pe el. Dacă privim raportul termenilor unui silogism din punctul de vedere al conţinuturilor lor, acest principiu devine *nota notae est nota rei ipsius*, sau, *praedicatum praedicati est etiam praedicatum subjecti*. În cazul în care un predicat nu convine predicatului subiectului, acest predicat nu convine nici subiectului: *repugnans notae repugnans rei ipsi*, sau *repugnans praedicati repugnans rei ipsi*.

Logica scolastică s-a ocupat îndelung de acest principiu pe care l-a considerat cînd în comprehensiune, cînd în extensiune şi pe care l-a declarat „axioma silogismului".

Este indiferent dacă acesta este unicul principiu al tuturor modurilor şi figurilor silogistice — problemă care a fost dezbătută de unii logicieni —, deoarece este sigur că principiul *dictum de omni et nullo* este un principiu al silogismului şi acest lucru ne interesează aici.

Într-adevăr, să presupunem că: 1) ψ are predicatul φ; 2) x are predicatul ψ; 3) atunci x are predicatul φ. Principiul precedent se aplică în mod strict şi obţinem silogismul următor în *Barbara*, al primei figuri, scris în comprehensiune:

$$\vdash : \varphi(\psi) \cdot \psi(x) \cdot \supset \cdot \varphi(x) \qquad (1)$$

Sau în extensiune:

$$\vdash : \hat{z}(\psi z) \subset \hat{z}(\varphi z) \cdot x \in \hat{z}(\psi z) \cdot \supset \cdot x \in \hat{z}(\varphi z)$$

Considerînd forma negativă a acestui principiu (inclusă, de altfel, în formele silogistice precedente), putem să scriem:

$$\vdash : \sim \varphi(\psi) \cdot \psi(x) \cdot \supset \cdot \sim \varphi(x) \qquad (2)$$

Dacă o entitate logică x are predicatul ψ, faptul că ψ are predicatul φ ne autorizează să-i acordăm lui x predicatul φ; dacă o entitate logică x are predicatul ψ, faptul că ψ nu are predicatul φ ne autorizează să nu-i acordăm lui x predicatul φ. Acesta este raportul logic al noţiunilor şi rolul termenului mediu în silogism.

Fără acest mecanism, din simpla atribuire a unui predicat ψ unei entităţi x, nu rezultă nici o altă proprietate pentru x.

Este adevărat că există forme incomplete ale silogismului ca *entimema*, şi în care una dintre premise este subînţeleasă, fiind uşor şi direct descifrabilă în raportul care există între premisa dată şi concluzie, aşa că putem scrie:

$$\psi(x) \supset \varphi(x)$$

„Dacă x are predicatul ψ, atunci x are predicatul φ". De exemplu, putem spune: „aerul este o substanţă", deci „aerul are greutate", subînţelegînd premisa: „orice substanţă are greutate".

Silogismele citate sînt valabile pentru toate valorile variabilelor, dar nu în mod complet arbitrar: ele trebuie să satisfacă legile silogismului.

De exemplu, din două premise afirmative nu poate să decurgă o concluzie negativă: *ambae affirmantes nequeunt generare negantem.*

Și mai interesantă este regula conform căreia concluzia urmează partea cea mai slabă: *pejorem sequitur semper conclusio partem.* Aceasta înseamnă că dacă una dintre premise este particulară, concluzia este particulară, şi dacă una dintre premise este negativă, concluzia este negativă. În consecinţă, într-un silogism incomplet, *entimema,* dacă premisa dată este negativă, concluzia este negativă:

$$\sim \psi(x) \supset \sim \varphi(x)$$

Din faptul că o entitate logică x nu are, pur şi simplu, predicatul ψ nu poate să rezulte decît rezultatul negativ că x nu are un predicat φ, bazîndu-ne pe raportul logic subînţeles dintre ψ şi φ. Această regulă ar putea servi la găsirea soluţiei paradoxelor.

Menţionăm aici, în mod special, prima regulă a silogismului, după care orice silogism trebuie să aibă trei termeni, nici mai mulţi, nici mai puţini: *terminus esto triplex.* Chiar într-un silogism incomplet, în *entimemă,* cu toate că una dintre premise nu apare în mod explicit, există trei termeni. Deci, prima regulă a silogismului impune silogismelor, fie sub forma (1), fie sub forma (2), condiţia de a avea trei termeni distincţi, deci x, ψ şi φ nu pot fi identici, doi cîte doi:

$$x \neq \psi$$

$$x \neq \varphi$$

$$\psi \neq \varphi$$

Numai în acest caz este posibil să atribuim sau nu unei entităţi logice x un predicat φ, bazîndu-ne exclusiv pe faptul că x nu are predicatul ψ. Chiar în *entimemă,* condiţia este indispensabilă.

Să revenim acum la definițiile care provoacă paradoxele. Din faptul general că o entitate logică x are predicatul ψ, i se atribuie lui x un predicat φ:

$$\varphi(x) =_{Df} \psi(x) \tag{a}$$

Din faptul că o entitate logică x nu admite predicatul ψ, atribuim lui x predicatul φ:

$$\varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x) \tag{b}$$

Se vede că asemenea definiții sînt formele silogistice prescurtate, *entimeme*, care, dacă s-ar ține seama de relația logică existentă între cei doi membri (implicația), ar trebui scrise:

$$\psi(x) \supset_{Df} \varphi(x) \tag{a'}$$

$$\sim \psi(x) \supset_{Df} \varphi(x) \tag{b'}$$

În definițiile (a) și (b) am ținut totuși seama de faptul că avem de-a face cu un antecedent logic și un consecvent logic și termenul din dreapta a fost numit *definiens* iar termenul din stînga, *definiendum*. Este adevărat că dacă termenul *definiens* este adevărat, termenul *definiendum* este și el adevărat; dacă termenul *definiens* este fals, termenul *definiendum* este și el fals, dar numai dacă între ψ și φ există un raport logic enunțat explicit sau implicit și care presupune principiul *nota notae est nota rei ipsius*, fie în comprehensiune, fie în extensiune. Rezultă de aici că în definițiile de forma (a) sau (b) trebuie să existe un raport logic între simbolurile ψ și φ, în așa fel încît acest raport să facă posibilă atribuirea predicatului φ lui x, bazîndu-ne pe atribuirea sau non-atribuirea predicatului ψ lui x, ceea ce ar trebui să stabilească o a doua premisă care nu apare.

Acesta este mecanismul predicației și nu se cunoaște altă posibilitate de a atribui sau nu un predicat φ lui x, din simplul fapt că x *are sau nu are un predicat ψ.*

Din aceste condiții ale silogismului rezultă deci două lucruri: 1) că în definițiile (a) și (b), simbolurile x, ψ și φ nu pot fi identice, două cîte două; 2) că între ψ și φ există un raport logic, pe care definițiile precedente îl presupun și care le face posibile, *chiar dacă acest raport ar fi stabilit în mod convențional, sau ar însemna o abreviere etc.*

În consecință, în definițiile (a) și (b), x nu poate să ia niciodată valoarea ψ sau φ, după cum, de altfel, ψ nu poate lua valoarea φ, deoarece, în caz contrar, nu se mai respectă prima regulă a silogismului, *terminus esto triplex*, și se ajunge la rezultatul:

$$\varphi(\psi) =_{Df} \psi(\psi)$$
$$\varphi(\psi) =_{Df} \sim \psi(\psi)$$

Cu alte cuvinte, asemenea definiții nu sînt permise, deoarece, în felul acesta, nu i se poate atribui unei entități logice ψ, în virtutea faptului că ea admite un predicat ψ (sau nu îl admite), un alt predicat φ; în acest caz, mecanismul logic care ar face posibilă această predicație nu poate funcționa, pentru că nu există trei termeni. Aceasta este evident, pentru că din faptul că definim un predicat ψ și din faptul că pentru ψ rezultă o proprietate din propria sa definiție, pentru ψ nu poate să rezulte nimic altceva decît propria sa definiție.

Această concluzie arată că probleme ca acelea exprimate de paradoxele lui Burali-Forti, Cantor, Russell etc. nu pot fi enunțate în definiții logice. În ceea ce privește paradoxele mai generale, construite de noi, ca și paradoxele lui Grelling-Nelson, Richard și Gödel, ele pot fi enunțate, dar numai dacă se ține seama de condițiile precedente.

Am regăsit astfel rezultatele obținute mai înainte pe alte căi, cu ajutorul principiului contradicției ($T\omega$) sau întrebuințînd condițiile definiției (D_1 și D_2).

Bineînțeles, aceeași concluzie se aplică, în mod exact, definițiilor scrise în extensiune:

$$x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} x \in \hat{z}(\psi z)$$

$$x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \sim x \in \hat{z}(\psi z)$$

Și aici trebuie să avem trei termeni distincți pentru ca mecanismul atribuirii să poată funcționa, deci:

$$x \neq \hat{z}(\varphi z)$$

$$x \neq \hat{z}(\psi z)$$

$$\hat{z}(\psi z) \neq \hat{z}(\varphi z)$$

Prin urmare, din definiţiile precedente nu mai putem obţine definiţiile vicioase:

$$\hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\psi z)$$

$$\hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \sim \hat{z}(\psi z) \in \hat{z}(\psi z)$$

Aceste ultime definiţii nu mai pot fi enunţate.

Regula *terminus esto triplex* a fost stabilită şi amplu discutată de Aristotel însuşi (*Analytica priora*, I, 25) şi a fost unanim recunoscută de atunci, în toate tratatele de logică, pentru că ea a descifrat în principiul silogismului *nota notae est nota rei ipsius* cei trei termeni distincţi *res*, *nota* şi *nota notae*, fără de care mecanismul silogistic al predicaţiei nu este posibil. Kant [1] scrie, referitor la această regulă, că este într-adevăr necesar să avem trei termeni, pentru a lega doi termeni, subiectul şi predicatul, printr-o notă (*Merkmal*) intermediară, iar logicianul Liard spune, în *Logica* sa, că această regulă nu este o simplă regulă, ci enunţul însuşi al silogismului.

Atragem atenţia că această regulă este formulată în mod complet sub forma *terminus esto triplex, medius, major, minorque*, atenţia logicienilor fiind fixată mai ales asupra ultimei părţi a acestei expresii, parte care enunţă aspectul cantitativ al termenilor unui silogism: termenul mediu, termenul major şi termenul minor. S-a acceptat astfel, în mod natural şi implicit, obligaţia exprimată de această regulă, fără a i se mai da semnificaţia veritabilă şi primă pe care ea a avut-o în gîndirea Stagiritului. Însă tocmai asupra numărului de trei (al termenilor) a insistat Aristotel în capitolul respectiv din *Analytica Priora* şi, în acest sens, regula poate fi numită regula *predicaţiei mediate*. Predicaţia mediată are loc între doi termeni prin intermediul unui al treilea şi atunci această regulă este chiar definiţia silogismului, observaţie făcută chiar de Liard.

Eroarea comisă în paradoxe consistă deci în tentativa de a construi o predicaţie mediată cu doi termeni, adică fără termenul intermediar, ceea ce nu este posibil şi ceea ce conduce la o *petitio principii* sau *circulus in probando* (dacă privim predicaţia mediată ca o argumentare), sau la o

definiţie *idem per idem* sau contradictorie (dacă privim acest mecanism ca un procedeu de definiţie).

Aristotel a enumerat aproape toate speciile de sofisme, dar nu a bănuit posibilitatea acestui sofism, care înseamnă, în fond, construcţia unui silogism cu doi termeni, în care nu există nici o predicaţie. (Ne reamintim că H. Poincaré, fără a se folosi de „tehnica“ logicienilor, printr-o intuiţie genială, a observat că paradoxele apar numai graţie unor definiţii nepredicative).

6. Observaţii generale

(1) *Formula paradoxelor*

Toate paradoxele sînt bazate pe o singură şi aceeaşi greşeală de logică care se comite nerespectîndu-se regulile definiţiei exprimate de D_1 şi D_2, sau încălcînd principiul contradicţiei (fapt pus în lumină de $T\omega$) sau, în sfîrşit, neţinîndu-se seamă de regula *terminus esto triplex* care exprimă mecanismul predicaţiei. Eroarea este aceeaşi, privită însă din trei puncte de vedere diferite. Formula generală pentru construirea unui paradox, fie de tipul lui Burali-Forti, fie de tipul, mai general, formulat de noi, este:

(a) *„Dacă x are predicatul* ψ *(variabil), atunci x are predicatul P“*.

(b) *„Dacă x nu are predicatul* ψ *(variabil), atunci x are predicatul P“*.

Trebuie să remarcăm că, în fond, avem o singură formulă.

Să enunţăm o problemă într-un cadru oarecare, bazată pe una dintre aceste definiţii, în care ψ să fie variabil; dacă nu ţinem seama de D_1 sau D_2, ψ va lua valoarea P, la un moment dat, şi paradoxul se va produce, pentru că acest caz corespunde propoziţiilor implicit conţinute în definiţiile (a) sau (b): „Dacă predicatul x are predicatul P, atunci x are predicatul P“ (definiţie *idem per idem*), sau „dacă x nu are predicatul P, atunci x are predicatul P“ (definiţie contradictorie). Lucrul acesta se întîmplă pentru orice x, deci şi în cazul particular $x = \psi$. S-ar putea construi paradoxe mult mai complicate, plecînd de la definiţia

și mai generală: „dacă x nu are predicatul ψ (variabil), atunci x are predicatul φ (variabil)“, făcînd să corespundă fiecărei valori a lui φ o valoare și numai una, pentru ψ. Paradoxul va apărea în mod inevitabil în momentul în care ψ va lua o valoare determinată ψ_k, care să fie exact valoarea corespunzătoare φ_k a variabilei pentru indicele k, adică $\psi_k = \varphi_k$ (fără a mai ține seama de relația $\psi \neq \varphi$).

În mod analog, se pot construi paradoxe mai generale, bazate pe una din propozițiile următoare, care sînt formele cele mai generale ale definițiilor (a) și (b):

(A) „*Dacă x are relația R cu* ψ, *atunci x are relația R cu* φ“.

(B) „*Dacă x nu are relația R cu* ψ, *atunci x are relația R cu* φ“.

Orice definiție care are una din formele precedente, oricare ar fi semnificația simbolurilor, poate să provoace un paradox dacă nu se respectă D_1 sau D_2. Dar paradoxul este acceptat prin definiție.

(2) *Unicitatea soluției*

Trebuie să observăm faptul remarcabil că soluția este unică și de natură pur logică, nepresupunînd nici un element străin de principiile clasice ale logicii.

În urma criticii făcute, în mod special, de Ramsey, Russell a acceptat despărțirea antinomiilor în antinomii logice și antinomii semantice sau sintactice (lingvistice) și a renunțat la teoria ramificată a tipurilor și la principiul de reductibilitate. Soluția dată de noi demonstrează că nu există nici o diferență logică între antinomiile logice (paradoxul *compatibil — incompatibil* și cazul său particular, paradoxul lui Russell *predicabil—impredicabil*, paradoxul clasei claselor *incompatibile* și cazul său particular, paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu își aparțin ca element etc.), și antinomiile semantice (paradoxul *izonom—heteronom* și cazul său particular, paradoxul lui Grelling—Nelson, paradoxul lui Richard etc.).

Această diviziune este fictivă, deoarece paradoxele se produc, toate, din aceeași eroare și sînt rezolvate, toate, cu aceeași soluție. Nu există decît paradoxe logice, toate de același tip.

Această clasificare nu este nouă; ea este citată de Aristotel ([1], *De Sophisticis Elenchis*) care s-a ocupat de clasi-

ficarea sofismelor în două categorii: 1) sofismele de limbaj, numite *in dictione* — παρὰ τὴν λέξιν; 2) sofismele de gîndire sau logice, numite *extra dictionem* — οἱ ἔξω τῆς λέξεων. Această clasificare, menţinută de aproape toate manualele de logică, a fost contestată chiar de Aristotel. El nu a susţinut niciodată că cele două specii de sofisme nu au aceeaşi soluţie şi scrie textual:

„Diferenţa pe care o fac unii între argumente, spunînd că unele se referă la limbaj şi altele la gîndire, nu este adevărată. Este absurd să presupunem că există argumente care se referă la cuvinte şi altele care se referă la gîndire, şi că deci ele nu sînt identice" ([1], *op. cit.*, 10).

(3) *Paradoxele şi principiile logice*

Deoarece expresiile de tipul $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$, sau, în extensiune, $\alpha \in \alpha$ şi $\sim(\alpha \in \alpha)$ nu puteau fi declarate adevărate sau false, pentru că s-ar fi ajuns la paradoxe, Brouwer şi Şcoala intuiţionistă ca şi cei care au creat logici polivalente, Lewis, Lukasiewicz, Paulette Février, J. C. Destouches, Church etc. au crezut că principiul terţului exclus are o aplicaţie mai restrînsă şi că antinomiile logico-matematice sînt provocate tocmai de acceptarea valabilităţii universale a acestui principiu. Cu toate că problema logicilor polivalente este independentă de problema paradoxelor, vom face o remarcă privitoare la prezenţa acestui principiu în paradoxe. Într-un paradox se obţine echivalenţa a două propoziţii contradictorii (prin diferite substituţii):

$$\vdash \cdot p \equiv \sim p \qquad (1)$$

Conform propoziţiei *5.23 din *Principia Mathematica*, echivalenţa a două propoziţii oarecare p şi q poate fi scrisă după cum urmează:

$$*5.23 \qquad \vdash : \cdot p \equiv q \cdot \equiv : p \cdot q \, v \sim p \cdot \sim q$$

Făcînd în această formulă $q = \sim p$, obţinem:

$$\vdash : \cdot p \equiv \sim p \cdot \equiv : p \cdot \sim p \, v \sim p \cdot p$$

Sau încă:

$$\vdash : \cdot p \equiv \sim p \cdot \equiv : \sim p \cdot p \qquad (2)$$

Echivalenţa celor două propoziţii contradictorii este echivalentă cu afirmarea lor simultană, ceea ce încalcă principiul contradicţiei. Astfel, echivalenţa (1) afectează în mod indiscutabil principiul contradicţiei, pe care nici Brouwer însuşi nu a îndrăznit să-l amputeze. Soluţia dată de noi paradoxelor a arătat că, într-adevăr, principiul contradicţiei este acela care trebuie respectat într-o definiţie de forma:

$$\varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x),$$

ca şi în echivalenţele generale corespunzătoare, lucru exprimat explicit de formulele Tω sau D_2.

Tω $\qquad \vdash : \varphi(x) \equiv \sim \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

D_2 $\qquad \vdash : \varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$

Aceste tautologii, care fac ca într-o definiţie cu forma generală dată, sau în echivalenţa respectivă, să se ţină seama de principiul contradicţiei, sînt universal valabile.

Aplicarea principiilor logice, care sînt universale, nu poate duce la o limitare; pentru acest motiv valabilitatea formulelor Tω şi D_2 nu este limitată, pentru că ele exprimă această universalitate a principiului contradicţiei.

(4) *De ce nu au putut fi rezolvate paradoxele?*

Rezultatele precedente au arătat, de asemenea, în mod explicit, cauza care a împiedicat pînă acum găsirea soluţiei paradoxelor, fapt care se poate rezuma în cele două observaţii care urmează:

(a) S-a căutat rezolvarea principalelor paradoxe pe o cale străină de contradicţia reală, care s-a strecurat în definiţia iniţială a problemei, în speţă, pe calea principiului terţului exclus, în loc de aceea a principiului contradicţiei. Din faptul că o propoziţie este echivalentă cu contradictoria sa, s-a tras concluzia că ea nu poate fi nici adevărată, nici falsă, deci ea scapă principiului terţului exclus. Aceasta este prima greşeală.

(b) Ocupîndu-se în mod special de problema expresiilor de forma $\varphi(\varphi)$ şi $\sim \varphi(\varphi)$, sau, în extensiune, $\alpha \in \alpha$ şi $\sim(\alpha \in \alpha)$, care apar în paradoxele teoriei mulţimilor, logi-

cienii, şi printre ei, în primul rînd, Russell, nu au sesizat cele două roluri distincte ale aceluiaşi simbol φ (sau α), ca argument şi ca predicat. Eroarea a devenit atît de subtilă, încît nu i se mai putea stabili locul. Nu puteam înţelege de ce argumentul ψ este în relaţie cu simbolul φ în definiţia $\varphi(\psi) =_{Df} \sim \psi(\psi)$, în speţă, în relaţia $\psi \neq \varphi$, din moment ce argumentul ψ nu apare direct în această relaţie, cu φ, ci ψ ca predicat. Nu valoarea $\psi = \varphi$ a argumentului provoacă paradoxul, ci valoarea $\psi = \varphi$ a predicatului variabil ψ ca funcţie. Acest lucru a apărut clar în definiţiile generale de forma $\varphi(x) =_{Df} \sim \psi(x)$ care stau la baza paradoxelor construite de noi şi, în fond, la baza tuturor paradoxelor.

Dacă s-ar fi ţinut seama, şi s-ar fi aprofundat gîndirea lui Wittgenstein în această problemă, care a văzut cu toată claritatea care sînt motivele ce provoacă aceste contradicţii, se poate presupune că încă de mult am fi avut soluţia lor. Iată ce scrie el în privinţa întrebuinţării aceluiaşi simbol pentru două lucruri deosebite [1]:

„În limbajul curent se întîmplă des că acelaşi cuvînt semnifică în două moduri deosebite — şi deci aparţine unor simboluri diferite — sau că două cuvinte, care au semnificaţii diferite, sînt aparent întrebuinţate în acelaşi mod în propoziţie" (3.323).

„Astfel se nasc uşor cele mai fundamentale confuzii (de care este plină întreaga filozofie)" (3.324).

„Pentru a evita aceste erori, trebuie să întrebuinţăm un simbolism care să le excludă, neîntrebuinţînd acelaşi semn în simboluri diferite şi neîntrebuinţînd semne în acelaşi mod cînd semnifică în moduri deosebite. Un simbolism, prin urmare, care ascultă de regulile gramaticii *logice* — ale sintaxei logice.

(Simbolismul logic al lui Frege şi Russell este un asemenea limbaj, care nu exclude totuşi toate erorile.)" (3.325).

Este astfel evident, pentru ce expresii de forma $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$ etc. nu sînt corecte, conform celor spuse de Wittgenstein, fiindcă acelaşi semn φ este întrebuinţat pentru două semnificaţii deosebite: o dată ca argument şi o dată ca predicat al argumentului.

VII

PARADOXUL MINCINOSULUI

Între paradoxele studiate pînă acum și paradoxul mincinosului există o mică diferență : în timp ce primele sînt construite cu funcții propoziționale, paradoxul mincinosului este construit cu funcții de adevăr. Din acest motiv, ne-am decis să examinăm separat această antinomie, deși natura sa este identică cu a celorlalte.

1. Analiza unui argument ἀντιστρέφων

Vom examina, înainte de a ne ocupa de paradoxul numit al mincinosului, un paradox analog, făcînd parte din cele numite de greci ἀντιστρέφοντα sau de latini, *reciproca*, și în care mecanismul logic este mult mai vizibil, deși are aceeași structură. După cum paradoxele construite de noi, *compatibil — incompatibil, izonom — heteronom* etc., au dilatat eroarea, pentru a o face vizibilă și sesizabilă, la fel paradoxul de care ne vom ocupa va arăta defectul argumentației în paradoxul mincinosului.

Una dintre variantele acestor argumente *reciproca* este următoarea.

Un filozof este condamnat la moarte de către un calif. Acesta face o excepție de la regulă și acordă filozofului privilegiul de a-și alege el însuși felul execuției.

„Dacă îmi vei spune un adevăr, spune califul, vei fi ucis cu sabia ; dacă vei spune o minciună, vei fi ucis prin ștreang".

Se lasă filozofului cîtva timp de meditaţie, după care el spune califului propoziţia următoare: „Voi fi ucis prin ştreang". Iată acum gravitatea problemei: dacă această propoziţie este adevărată, atunci filozoful trebuie să fie ucis cu sabia şi deci propoziţia este falsă; dacă această propoziţie este falsă, filozoful trebuie ucis prin ştreang, dar atunci ea este adevărată! Propoziţia „Voi fi ucis prin ştreang" afirmată de filozof, deşi are un sens precis, nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, deşi ea trebuie să fie adevărată sau falsă, *tertium non datur*! Acest paradox poate fi reconstituit în orice altă circumstanţă, făcîndu-se să depindă adevărul sau falsitatea unei propoziţii de un eveniment viitor. Aceasta a condus la ideea că propoziţiile referitoare la „viitorii contingenţi" — *futura contingentia* — scapă principiului terţului exclus, fiind nedeterminate, idee pe care unii au crezut-o profesată de Aristotel însuşi, după cum am menţionat deja. Vom vedea imediat că eroarea argumentaţiei nu are nici o legătură cu timpul.

Să vedem mai întîi cum se introduce cercul vicios. Condiţiile puse de calif sînt: filozoful va spune o propoziţie care, prin adevărul sau falsitatea sa, va determina modul execuţiei sale.

Filozoful enunţă o propoziţie al cărei adevăr sau falsitate depinde de modul execuţiei sale.

Condiţiile au fost schimbate. Califul spune:

1. *Modalitatea execuţiei tale depinde de adevărul sau falsitatea propoziţiei ce o vei spune.*

Filozoful ripostează prin propoziţia sa:

2. *Adevărul sau falsitatea propoziţiei mele depinde de modalitatea execuţiei mele.*

Cu alte cuvinte, califul stabilise un antecedent logic care determină consecinţele sale, în timp ce filozoful schimbă problema, prin enunţul însuşi al răspunsului său, luînd ca antecedent tocmai ceea ce enunţul problemei declarase drept consecvent. Criteriile 1) şi 2) sînt confundate într-unul singur, dar ele funcţionează simultan, de unde cercul vicios.

În general, dîndu-se o problemă în care rezultatul e datorit adevărului sau falsităţii unei propoziţii p, se obţine o *petitio principii*, sau un *cerc vicios*, dacă facem ca valoarea

adevărului propoziției p să depindă tocmai de acest rezultat, adică, dacă se introduce explicit sau implicit, un criteriu invers în raport cu criteriul dat pentru determinarea valorilor de adevăr ale propoziției p. Fie K_1 criteriul după care decurg consecințele într-o astfel de problemă, consecințe determinate de valorile de adevăr ale unei propoziții p. Valorile de adevăr ale propoziției p trebuie determinate de un alt criteriu K_2, care nu poate fi criteriul $K_1 : K_1 \neq K_2$.

Dacă nu se ține seamă de această condiție, se ajunge la o problemă iluzorie, în care nu se spune nimic, și care e fie o *tautologie*, fie o *contradicție*, și anume:

dacă adevărul propoziției p este făcut să depindă de consecința însăși care e determinată de adevărul propoziției p, avem o tautologie; dacă adevărul propoziției e făcut să depindă de consecința care e determinată de falsitatea propoziției p, atunci avem o contradicție.

Astfel de criterii pot fi introduse pe ascuns, cum s-a văzut în exemplul de mai sus. În aceasta constă eroarea comisă de paradoxele de această natură: confundarea celor două criterii inverse, unul dat, celălalt introdus implicit. Dacă filozoful ar fi spus: „Voi fi ucis cu sabia“, n-ar fi rezultat nimic, afară de o tautologie trivială: dacă această propoziție e adevărată, ea e adevărată; dacă e falsă, atunci e falsă.

Deci nimic determinat, și filozoful n-ar fi spus nimic.

Pentru un adevărat logician, cealaltă propoziție: „Voi fi ucis prin ștreang“, n-ar putea nici ea să însemne ceva, din motive de simetrie logică. Filozoful avea toată libertatea să spună orice propoziție, un singur drept îi lipsea: acela de a nu spune nimic. Prin propoziția sa, „Voi fi ucis prin ștreang“ el face să depindă valoarea de adevăr a acestei propoziții de consecințele care ar trebui să decurgă din valoarea de adevăr ale aceleiași propoziții, deci a anulat criteriul care determină consecințele și de aceea el nu spune nimic.

Analogia acestui paradox cu antinomiile precedent studiate este evidentă. Fie, de exemplu, echivalența generală care conducea la paradoxul *compatibil—incompatibil*:

$$(x) \cdot P(x) \equiv \sim \psi(x)$$

sau în cazul particular *predicabil—impredicabil* (pentru $x=\psi$):

$$(\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim \psi(\psi)$$

şi unde teorema Tω ne-a obligat să ţinem seama de relaţia $\psi \neq P$. Şi aici se face o confuzie între două criterii: (1) *faptul că o entitate logică x (sau ψ) nu are predicatul ψ determină faptul că x are predicatul P. Criteriul invers este acum:* (2) *faptul că o entitate logică x (sau ψ) nu are predicatul P determină faptul pentru x (sau ψ) de a avea predicatul P.* Aceste două criterii inverse, confundate într-unul singur, fiindcă nu sînt explicitate, sînt introduse în momentul în care facem $\psi = P$, în echivalenţele citate. Dar definiţiile de forma generală

$$P(x) =_{Df} \psi(x)$$
$$P(x) =_{Df} \sim \psi(x)$$

au un termen definisant (*definiens*) şi un termen *definit* (*definiendum*), un antecedent logic şi un consecvent logic, care nu pot fi interschimbate, aşa cum au stabilit formulele Tω sau D_1 şi D_2.

2. Paradoxul mincinosului

Paradoxul „Califul şi filozoful" este un caz mai general al paradoxului mincinosului. Propoziţia „eu mint" nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, fără contradicţie. Situaţia bizară care se creează este următoarea: deşi hotărîrea cuiva de a minţi întotdeauna pare legitimă, el nu poate exprima poziţia adoptată decît printr-o contradicţie.

Ce înseamnă a fi mincinos? Este vorba de un mincinos consecvent, care a decis să mintă absolut întotdeauna, fiindcă cel care şi-ar lăsa libertatea să nu mintă o singură dată ar scăpa paradoxului. *A minţi absolut întotdeauna nu înseamnă decît a afirma ca fiind adevărat ceea ce e fals şi ca fiind fals ceea ce e adevărat.* Pentru a putea să mintă efectiv, mincinosul trebuie să ştie dacă ceea ce va minţi e adevărat sau fals; altfel, neştiind aceasta, i se poate întîmpla să spună adevărul, minţind la întîmplare, ceea ce e contrar ipotezei.

Mincinosul absolut își ia un angajament — care este tocmai definiția sa, enunțată prin „mint“; orice propoziție, indiferent de conținutul său, caracterizată numai prin valoarea sa de adevăr, el o declară falsă, și prin aceasta, el îi dă valoarea de adevăr, contrară celei ce o are. Numai în aceste condiții poate minți întotdeauna.

Mincinosul poate opera această inversiune a valorilor de adevăr ale unei propoziții p, fie utilizînd functorii de adevăr A (adevărat) și F (fals), fie cu ajutorul negației, care este suficientă pentru scopul propus, așa cum o arată matricea sa:

p	~p
A	F
F	A

Cu alte cuvinte, mincinosul spune prin expresia „mint“: *„adevărul sau falsitatea unei propoziții p determină adevărul sau falsitatea pe care o atribui propoziției p, oricare ar fi ea“*. Se vede deci că există aici un antecedent și un consecvent, la fel ca în paradoxul „Califul și filozoful“; antecedentul este „valoarea de adevăr a unei propoziții p“, iar consecventul este „valoarea de adevăr contrarie, atribuită de mincinos, propoziției p“. Dacă antecedentul nu este dat, adică dacă valoarea de adevăr a propoziției p nu este dată, mincinosul nu are ce minți. În plus, nu este permis să iei consecventul ca antecedent, așa cum am arătat în cazul precedent, căci altfel valorile de adevăr s-ar determina în cerc vicios și aceasta e eroarea care provoacă de altfel paradoxul, cum se va vedea mai jos.

În mod invers, și noi avem un criteriu pentru judecarea valorilor de adevăr acordate de către mincinosul absolut propozițiilor: *orice propoziție declarată adevărată de către mincinos va fi considerată falsă de către noi și orice propoziție declarată falsă de către mincinos va fi considerată adevărată de către noi*. Se poate deci trece de la valorile de adevăr ale propozițiilor la valorile de adevăr ale propozițiilor mincinosului și de la valorile de adevăr ale propozițiilor mincinosului la valorile de adevăr ale propozițiilor, inversînd de fiecare dată valoarea de adevăr a unei propoziții. Astfel deci, simpla afirmație „eu mint“ introduce două criterii:

1) *Criteriul mincinosului. Valoarea de adevăr posedată de o propoziție p (oricare ar fi ea) determină valoarea de adevăr pe care o atribui eu propoziției p, anume în mod invers (prin negație).*

2) *Criteriul nostru. Valoarea de adevăr pe care mincinosul o atribuie unei propoziții p (oricare ar fi ea) determină valoarea de adevăr posedată de propoziția p, anume în mod invers (prin negație).*

Prin urmare, orice propoziție p poate să se prezinte, în cadrul acestei probleme, cu valoarea sa de adevăr, independentă de mincinos, sau cu valoarea de adevăr pe care i-o atribuie mincinosul (care inversează prin negație, valorile de adevăr).

Confundînd cele două criterii, noi confundăm adevărul sau falsitatea mincinosului, cu adevărul sau falsitatea propoziției independente de mincinos; să notăm cu W criteriul după care acordăm unei propoziții p valoarea „adevărată" sau „falsă", independent de mincinos; să notăm cu V criteriul mincinosului (de a atribui oricărei propoziții p valori de adevăr contrare celor acordate lui p de criteriul W). În aceste condiții, W și V nu sînt identice, prin definiție, adică $W \neq V$. Acum, să vedem cum se confundă cele două criterii, deci valorile de adevăr atribuite de mincinos lui p, cu valorile de adevăr atribuite lui p, independent de mincinos. Eubulide Megaricul îl întreabă pe mincinos: ești mincinos sau nu ești? Propoziția „eu mint" o declari adevărată sau falsă? Dar mincinosul nu poate răspunde decît în două moduri, *tertium non datur*: 1) propoziția „eu mint" este adevărată; 2) propoziția „eu mint" este falsă.

1. Să presupunem că mincinosul atribuie propoziției „eu mint" valoarea „adevărată" (criteriul V). Atunci Eubulide Megaricul face următorul raționament: dacă această propoziție este adevărată (criteriu V), atunci este adevărat că minți (criteriul W), deci nu minți (criteriul W) cînd spui că minți (criteriul V), deci nu minți (criteriul W).

2. Să presupunem că mincinosul atribuie valoarea „falsă" propoziției „eu mint". Atunci Eubulide Megaricul face următorul raționament: dacă această propoziție e falsă (criteriul V), atunci e fals că tu minți (criteriul W), deci

tu nu minți (criteriul W), cînd spui că minți (criteriul V), deci tu minți (criteriul W).

Se observă că criteriul V funcționează în același timp cu criteriul W, fără nici o distincție, ca și cînd ar fi un singur criteriu W = V; se confundă astfel întotdeauna adevărul propoziției „eu mint" pentru mincinos (criteriul V) cu adevărul propoziției independent de mincinos (criteriul W). Confuzia valorilor de adevăr inverse ale propoziției „eu mint" provoacă paradoxul.

Să ținem seama de definiția mincinosului, exprimată prin propoziția „eu mint" în virtutea căreia valorile de adevăr (criteriul W) sînt inversate de mincinos (criteriul V). Avem aceste două situații posibile:

1. Propoziția „eu mint" e declarată adevărată de către mincinos (criteriul V). Atunci, fiindcă, prin definiție, mincinosul inversează valoarea de adevăr a propoziției „eu mint", trebuie să spunem că valoarea care rezultă pentru propoziția „eu mint" e falsă (criteriul W). Deci, în realitate, mincinosul, declarînd că e adevărat că minte (criteriul V) a declarat că e fals că minte (criteriul W), adică că nu minte (criteriul W). Nu rezultă nici o contradicție fiindcă rezultatul e compatibil cu definiția mincinosului.

2. Propoziția „eu mint" e declarată falsă de către mincinos (criteriul V). Atunci, fiindcă, prin definiție, mincinosul inversează valoarea de adevăr a propoziției „eu mint", trebuie să spunem că valoarea care rezultă pentru propoziția „eu mint" e adevărată (criteriul W). Deci, în realitate, mincinosul, declarînd că e fals că minte (criteriul V), a declarat că e adevărat că minte (criteriul W), adică că el minte (criteriul W). Nu rezultă nici o contradicție fiindcă rezultatul e compatibil cu definiția mincinosului.

Cu alte cuvinte, dacă ținem seama de faptul că mincinosul, astfel cum e definit, afirmă ca fiind adevărat ceea ce e fals și ca fiind fals ceea ce e adevărat și că noi trebuie, în consecință, să transformăm valorile de adevăr atribuite de el unei propoziții (oricare ar fi ea), propoziția „eu mint" poate fi declarată sau adevărată, sau falsă de către mincinos și nu rezultă absolut nimic, la fel cum nu rezultă nimic din faptul că noi declarăm propoziția „eu spun adevărul" adevărată sau falsă. Regăsim astfel a cincea soluție a logicienilor scolastici (vezi cap. IV, **15**).

Russell şi mai apoi Carnap, Tarski etc. au constatat că există în acest paradox o distincţie între valorile de adevăr ale propoziţiei „eu mint" şi au conchis atunci că nu se poate vorbi de „un adevăr", ci de „adevăruri", că noţiunea de adevăr este şi ea tipizată; ei au ajuns la concluzia că valorile de adevăr ale unei propoziţii nu pot fi exprimate în sistemul logic însuşi, în care a fost enunţată propoziţia, ci într-un metasistem. Eroarea lor a constat în faptul că nu au putut să descifreze natura acestei distincţii: există efectiv o distincţie între valorile de adevăr ale acestei probleme sau ale unor probleme analoge, dar care nu e datorită expresiilor logice şi metalogice: această distincţie e introdusă prin definiţie, dar nu într-un mod explicit.

3. Soluţia formală a paradoxului mincinosului

Am văzut că definiţia mincinosului este următoarea: el este acela care neagă valoarea de adevăr a oricărei propoziţii q. Să presupunem că cineva zice: orice propoziţie p, pe care o afirm, este negaţia unei alte propoziţii q, oricare ar fi ea. Cum aici intervin numai valorile de adevăr ale propoziţiilor, rezultă că am definit orice propoziţie p, în acest caz, astfel:

$$p =_{Df} \sim q$$

Deoarece această definiţie e valabilă pentru orice ar fi q, ea conduce la echivalenţa generală:

$$(q) \cdot p \equiv \sim q \qquad (2)$$

Pentru valoarea particulară q = p, obţinem contradicţia:

$$(p) \cdot p \equiv \sim p \qquad (3)$$

Aceasta arată că oricare ar fi semnificaţia propoziţiei p, legată de q prin definiţia (1), ajungem la paradoxul (3), care exprimă echivalenţa unei propoziţii cu negaţia sa, ceea ce este absurd.

Să definim o problemă oarecare, în care o propoziţie p, cu un conţinut dat, să fie legată de o alta q prin definiţia

(1) : pentru $q = p$, obținem paradoxul. Este cazul paradoxului „Califul și filozoful", de exemplu: dacă propoziția q, declarată de către filozof, e falsă, atunci el va fi executat prin ștreang.

În această problemă, avem definiția: „Tu declari falsă o propoziție q" (oricare ar fi ea) semnifică „se va face execuția prin ștreang".

„Se va face execuția prin ștreang" $=_{Df} \sim q$

De unde echivalența generală:

(q). „Se va face execuția prin ștreang" $\equiv \sim q$

Pentru q = „Se va face execuția prin ștreang": „Se va face execuția prin ștreang" $\equiv \sim$ „Se va face execuția prin ștreang".

Dacă într-o astfel de problemă, definim al doilea caz posibil, cum ar fi aici, „să nu se execute prin ștreang" semnifică „să se execute prin sabie", paradoxul ia o formă mai amuzantă:

„Se va face execuția prin ștreang" $\equiv$ „Se va face execuția prin sabie". În cazul mincinosului p = „eu mint", și definiția devine: „eu mint" semnifică „eu neg valoarea de adevăr a oricărei propoziții q":

$$„\text{eu mint}“ =_{Df} \sim q,$$

de unde:

$$(q).\ „\text{eu mint}“ \equiv \sim q$$

Pentru q = „eu mint", se obține paradoxul:

$$„\text{eu mint}“ \equiv \sim „\text{eu mint}“.$$

Propoziția „eu mint" e echivalentă cu propoziția „eu nu mint".

Se vede astfel că definiția (1) este definiția cea mai generală, aplicîndu-se, fie în cazul mai simplu al mincinosului, fie în cazurile mai complicate ca enunțurile paradoxelor de genul „Califul și filozoful".

La fel ca în cazul altor paradoxe, problema care se pune este aceeași: de ce în echivalența generală (2), propoziția q, care, conform definiției, poate fi arbitrară, nu poate lua valoarea $q = p$, căci atunci cădem peste o contradicție? De ce $q \neq p$?

Vom stabili teorema Tω pentru cazul funcţiilor de adevăr, demonstrată mai înainte în cazul funcţiilor propoziţionale. Vom pleca de la următoarea tautologie, relativă la identitatea a două propoziţii p şi q:

$$\vdash : p = q \cdot \supset \cdot p \equiv q \qquad \text{(I)}$$

Aceasta este evident şi se citeşte: dacă propoziţiile p şi q sînt identice, atunci ele sînt echivalente.

Dar inversa nu este valabilă; s-ar putea ca $p \equiv q$ şi propoziţiile p şi q să nu fie identice.

Formula (1) este o implicaţie şi nu poate fi o echivalenţă. Această formulă este o tautologie, ceea ce se poate constata cu uşurinţă, întocmind tabloul respectiv, al valorilor de adevăr.

Prin transpoziţie, obţinem:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \supset \cdot \sim (p = q)$$

Sau, fiindcă $\sim (p = q)$, se poate scrie $p \neq q$:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \supset \cdot p \neq q \qquad \text{(II)}$$

În *Principia Mathematica*, la teorema 5·18, găsim următoarea tautologie:

5·18 $\vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot \sim (p \equiv \sim q)$

Sau, prin transpoziţie:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \equiv \cdot p \equiv \sim q$$

Substituind în (II) primului membru al implicaţiei $\sim (p \equiv q)$ expresia echivalentă $p \equiv \sim q$, avem în cele din urmă teorema Tω, pentru cazul funcţiilor de adevăr:

$$T\omega \vdash : p \equiv \sim q \cdot \supset \cdot q \neq p$$

Am demonstrat Tω şi în acest caz, în cadrul sistemului din *Principia Mathematica*, fără a face apel la nici un principiu metalogic sau de „tipizare" a adevărului. Această teoremă putea fi obţinută încă mai uşor, dacă se utilizau condiţiile definiţiilor, aşa cum am făcut-o în cazul altor paradoxe. De exemplu, în definiţiile de forma

$$p =_{Df} q$$

$$p =_{Df} \sim q,$$

trebuie ţinut seama, ca să nu avem o definiţie *idem per idem* (adică o identitate) sau o contradicţie, de relaţia $q \neq p$. Deci:

$$D_1 \qquad \vdash : p =_{Df} q \cdot \supset \cdot q \neq p$$

$$D_2 \qquad \vdash : p =_{Df} \sim q \cdot \supset \cdot q \neq p$$

Definiţia generală care este la baza paradoxului mincinosului sau a altor paradoxe înrudite numite ἀντιστρέφοντα,

$$p =_{Df} \sim q,$$

conduce la o echivalenţă generală, care, cu $T\omega$, dă loc la un *modus ponens*:

$$\begin{array}{ll} & \vdash :(q) \cdot p \equiv \sim q \\ T\omega & \underline{\vdash : p \equiv \sim q \cdot \supset \cdot q \neq p} \\ & \vdash q \neq p \end{array}$$

În consecinţă, în echivalenţa mincinosului (sau a oricărei probleme de acest fel), q nu poate lua niciodată valoarea lui p (sau conţinutul lui p, căci atunci q ar avea aceeaşi valoare de adevăr) şi în particular q nu poate fi identic cu p = „eu mint".

Într-adevăr, avem definiţia:

$$\text{„eu mint"} =_{Df} \sim q$$

De unde echivalenţa respectivă, care, cu $T\omega$ (unde p= „eu mint"), ne dă *modus ponens* următor:

$$\begin{array}{ll} & \vdash : (q) \cdot \text{„eu mint"} \equiv \sim q \\ T\omega & \underline{\vdash : \text{„eu mint"} \equiv \sim q \cdot \supset q \neq \text{„eu mint"}} \\ & \vdash \cdot q \neq \text{„eu mint"} \end{array}$$

Paradoxul mincinosului şi cele analoge sînt astfel reduse exact la tipul celorlalte paradoxe, *compatibil — incompatibil*, *predicabil — impredicabil* etc.

Observaţie. Se vede deci că propoziţia

(1) „Afirm p şi p e fals",

care este una dintre formele paradoxului mincinosului, studiată deja în evul mediu (vezi cap. III, 10) şi analizată de asemenea de Russell

(*Principia Mathematica*, I, p. 44), nu este decît un caz particular al propoziției mai generale:

(2) „Afirm p și p afirmă că q e fals"

(q fiind o propoziție oarecare). Dar cum q poate fi orice propoziție, se poate lua în mod imprudent $q = p$, și atunci propoziția generală (2) devine propoziția (1), pe care pare s-o includă: „Afirm p și p afirmă că p e fals".

Insă propoziția (1) a fost exclusă, prin calcul, din toate cazurile particulare cu pot fi reprezentate prin propoziția (2), fiindcă am găsit $q \neq p$. Deci propoziția (2) nu e o universală, și observația făcută de Perelman (cap. IV, 8) este perfect justificată.

Forma cea mai generală, sub care am considerat paradoxul, a dilatat, ca să spunem așa, eroarea, pentru a o face vizibilă și sesizabilă, exact așa cum s-au petrecut lucrurile și cu celelalte paradoxe.

Într-adevăr, am demonstrat că într-o definiție de forma:

$$P(x) = \sim \psi(x) \qquad \text{Def}$$

P nu poate fi inclus între toate predicatele ψ, și atunci ne-am întrebat: ce este simbolul P, pe care calculul îl exclude prin condiția impusă $\psi \neq P$? Definiția precedentă nu este deci o universală, cum bine a remarcat Perelman și noi am dovedit-o, dar rămîne încă de elucidat o întrebare: ce este P dacă nu poate fi inclus între *toate* predicatele?

În același fel, vedem că propoziția mincinosului (1) nu poate fi numărată printre toate propozițiile reprezentate prin (2) și atunci ne întrebăm: ce este propoziția (1)?

Vom da în capitolul VIII, „*Explicația paradoxelor*", răspunsul la această chestiune și vom vedea atunci că toate definițiile care sînt la baza acestor contradicții sînt construite prin accident și de aceea ele nu sînt universale.

VIII

EXPLICAȚIA PARADOXELOR

1. Definiții prin accident

Soluția formală a paradoxelor conține în ea însăși explicația apariției lor. Vom mai face încă cîteva considerații, examinînd mai îndeaproape mecanismul paradoxelor, pentru a lămuri complet natura noțiunilor care intervin în aceste probleme.

Să reluăm unul dintre aceste paradoxe (toate fiind de același tip), de exemplu, paradoxul *compatibil — incompatibil*. Am avut seria tuturor predicatelor scrise în două ordini diferite, printre care s-au găsit de asemenea predicatele *compatibil — incompatibil*, la ranguri bine determinate:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n.$$

Am definit predicatul incompatibil: dacă un predicat dat P_x, din prima serie, admite ca predicat predicatul de același rang din a doua serie, Q_x, predicatul P_x are proprietatea de a fi *compatibil*; dacă P_x nu admite predicatul Q_x, P_x are proprietatea de a fi *incompatibil*.

Să considerăm toate predicatele din această problemă și să le ordonăm într-o serie oarecare, după un criteriu ales:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$

Aceasta nu este singura serie (de exemplu, seria lexicografică) ce se poate forma cu aceste predicate.

Cîte serii putem forma? Vom putea — prin permutări bine definite în seria precedentă — să obținem serii noi, perfect determinate. De exemplu, vom putea obține din seria lexicografică dată, o altă serie, făcînd permutări, în așa fel, încît fiecare predicat să treacă la un rang imediat superior, iar ultimul să ia locul primului; sau o permutare de același tip, dar de două ranguri, în care ultimele două predicate vor ocupa primele locuri etc. În total, se pot forma cu aceste „n" predicate un număr de serii diferite, egal cu numărul tuturor permutărilor posibile ce se pot face cu „n" elemente:

$$n!$$

În paradoxul considerat, *compatibil — incompatibil* (ca de altfel și în celelalte), luăm două serii de predicate din numărul n! al seriilor posibile și definim predicatele *compatibil* și *incompatibil*.

Este posibil să alegem două serii diferite, din numărul total n! de serii, în atîtea feluri în care este posibilă combinarea celor n! obiecte, două cîte două:

$$C_{n!}^{2} = \frac{n!\,(n! - 1)}{1.2}$$

Mai este încă un caz, cînd cele două serii sînt identice (paradoxul *predicabil — impredicabil*), și cu toate că fiecare serie poate fi considerată pereche cu ea însăși, toate aceste posibilități se reduc la una singură, căci ceea ce ne interesează în acest caz particular este faptul că în fiecare rang din cele două serii avem același predicat. Numărul total N al perechilor de serii, inclusiv acest caz particular, este deci:

$$N = \frac{n!\,(n! - 1)}{1.2} + 1$$

Numărul N este un număr fantastic. Se poate observa că doar pentru n = 10, valoarea lui N este:

$$N = 1814400 \times 3628799 + 1$$

Și cum numărul predicatelor este de ordinul miilor, se vede că valoarea lui N este într-adevăr din domeniul astronomiei.

Și acum să vedem ce-am făcut în problema acestei antinomii? Din acest număr imens N al posibilităților de compunere a perechilor de serii, pe care le vom nota ordinea R(1), ordinea R(2), ordinea R(3) ... ordinea R(N), am ales arbitrar o ordine oarecare R(p) (dar bine determinată) și am spus: în ordinea R(p), predicatul P_x, din prima serie, are proprietatea de a fi *compatibil* dacă admite ca predicat predicatul de același rang Q_x din seria a doua, și este *incompatibil*, în caz contrar.

Dar ordinea R(p) nu derivă direct și analitic din definițiile predicatelor, astfel încît predicatele *compatibil* și *incompatibil*, cu semnificația lor în această problemă, sînt definite bazîndu-ne pe ordinea R(p) arbitrar aleasă.

Cadrul oferit de ordinea R(p) nu este legat în nici un fel de definițiile predicatelor, și acesta este motivul pentru care un același predicat poate să fie, de exemplu, *compatibil* în ordinea R(p) și *incompatibil* în ordinea R(q).

Într-adevăr, să presupunem că în ordinea dată R(p), predicatul P_i = număr și predicatul de același rang din cealaltă serie este Q_i = ovipar; în acest caz, P_i = număr este *incompatibil*. Dacă am fi ales o altă ordine R(q), predicatul P_i = număr ar fi avut un rang P_r = număr iar predicatul corespunzător din cealaltă serie ar fi putut să fie, de exemplu, Q_r = abstract; în acest caz, predicatul P_r = număr ar fi fost *compatibil*.

În numărul imens N de cazuri posibile, un același predicat poate să fie într-un număr imens de cazuri *compatibil* și într-un număr imens de cazuri *incompatibil*.

Și aceasta, din cauză că proprietățile *compatibil* sau *incompatibil* nu sînt proprietăți care derivă direct și analitic din definiția unui predicat, în care caz ele ar aparține inseparabil predicatelor, ci sînt proprietăți definite arbitrar de noi. Definițiile unor astfel de predicate au fost denumite — de altfel — „non-predicative".

Dar ele sînt definițiile unor predicate valabile doar într-un cadru relativ și arbitrar ales R(p) și nu au nici un conținut în afara ordinii care le definește.

Logica clasică a cunoscut astfel de definiții, de care s-a ocupat în detaliu, denumindu-le *definiții prin accident*, accidentul nefiind un element constitutiv al definiției unui

concept, și a interzis categoric formarea unor asemenea definiții, ca fiind eronate.

Definiția logică a unui concept se face prin elemente permanente și proprii, și care exprimă analitic, conținutul său.

„Accidentul sau concomitentul ca predicat, scrie, de exemplu, Bain ([1], I, 2.17), exprimă ceva ce nu aparține esenței sau conotației subiectului și nici nu se poate deduce din ideea subiectului".

„Aurul este cel mai prețios dintre metale" sau „aurul este utilizat ca monedă" sînt propoziții în care predicatul este un accident sau un concomitent și, prin urmare, nu pot să fie propoziții definitorii pentru aur. Acest gen de afirmații sînt extrem de des întîlnite în practica cotidiană. Întîlnim tot timpul lucruri care se însoțesc cu toate că nu sînt cu nimic implicate unul într-altul. Logica veche a introdus o distincție — devenită tradițională — despre această categorie de proprietăți, separînd accidentele în două clase: accidente separabile și accidente inseparabile. Exemplul clasic al acestei distincții este dat de propozițiile: „Virgiliu locuiește la Roma" (accident separabil) și „Virgiliu s-a născut la Mantua" (accident inseparabil).

Bain recunoaște în propozițiile exprimînd o proprietate accidentală propozițiile sintetice ale lui Kant. Într-adevăr, în asemenea propoziții, predicatul, fiind un aditiv pozitiv pentru subiect, nu este conținut, în nici un fel, nici direct, nici indirect, în subiect. Cu alte cuvinte, legătura dintre subiect și predicatul accidental într-o asemenea propoziție nu are o bază logică, ca în propoziția verbală, esențială, identică (propoziția analitică a lui Kant), ci exclusiv o *bază de fapt*, de *constatare* pură, sau o *bază empirică* (în sensul cel mai larg al cuvîntului).

Această observație este extrem de importantă, căci dacă accidentul are o bază *de fapt* și nimic altceva, pentru a determina accidentul unui lucru, nu avem alt mijloc decît acela de a-l indica concret, întrucît el nu decurge din definiția lucrului care-l posedă.

De unde rezultă că, în domeniul accidentelor, teza intuiționistă este perfect justificată: „Orice propoziție (noi adăugăm: „accidentală") care are un conținut, trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri (*Sachverhalte*) bine determinate și accesibile experienței noastre".

Vom vedea mai departe aplicaţiile şi consecinţele acestei observaţii.

Se poate observa acum că predicatele *compatibil* şi *incompatibil* sînt predicate definite tipic prin accident, dat fiind că proprietăţile pe care le exprimă nu aparţin direct şi analitic conotaţiei unui predicat dat şi acelaşi predicat poate fi *compatibil* într-o ordine R(p) şi *incompatibil* într-o altă ordine R(q).

Trebuie, de asemenea, observat că accidentele *compatibil* şi *incompatibil* sînt separabile. Să considerăm din nou cele două serii de predicate ale acestui paradox şi fie rangul h al predicatului *compatibil* = $Comp_h$ şi k rangul predicatului *incompatibil* = Inc_k în cea de-a doua serie:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_h, \ldots\ldots, P_k, \ldots P_n.$$
$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Comp_h, \ldots, Inc_k, \ldots, Q_n.$$

Oricare ar fi ordinea aleasă R(p), deci oricare ar fi predicatul P_k, deci şi în cazul în care P_k ar fi predicatul *compatibil* sau *incompatibil* (paradoxul lui Russell, *predicabil* — *impredicabil*), predicatul P_k nu poate fi declarat nici *compatibil*, nici *incompatibil*. De ce? Pentru că fiind dat un predicat oarecare, P_k, proprietatea de a fi *compatibil* sau *incompatibil* nu derivă din definiţia predicatului considerat P_k, ci dintr-o problemă definită arbitrar, de care simpla întrebare „P_k este *compatibil* sau *incompatibil*"? nu mai ţine seama. Un predicat P_k nu poate fi *compatibil* sau *incompatibil* considerîndu-l în sine, izolat, ci într-o ordine relativă dată, pentru că nici o proprietate accidentală nu derivă din definiţia unui lucru ; astfel, spunînd, de exemplu, „Virgiliu este cel mai mare poet latin", nu înseamnă că s-a născut la Mantua sau că a locuit la Roma (accident).

În rezumat, analiza noastră arată că predicatele *compatibil* şi *incompatibil* sînt definite prin accident, bazîndu-se pe o ordine arbitrară R(p) ; considerînd aceste predicate printre predicatele $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ şi $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ ale celor două serii create de ordinea R(p), adică, considerîndu-le independente de ordinea aleasă arbitrar şi care le defineşte, ele îşi pierd accidentul, singurul element care le defineşte, şi deci ele nu mai sînt definite.

În cazul particular al paradoxului precedent — paradoxul *predicabil* — *impredicabil* — cînd cele două serii au fost

identic ordonate, aceste observații se aplică fără a modifica nimic. Aici, ordinea arbitrară R(p) definește acum două serii identice de predicate:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$
$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$

În acest cadru creat arbitrar, care nu decurge din definițiile predicatelor P_1, P_2, P_3, ..., P_n, spunem: dacă un predicat P_x admite ca predicat predicatul P_x (adică el însuși), atunci P_x are proprietatea de a fi *predicabil*, iar dacă P_x nu are predicatul P_x, atunci are proprietatea de a fi *impredicabil*. Cu alte cuvinte, predicatele *predicabil* și *impredicabil* sînt definite de expresiile $P_x(P_x)$ și $\sim P_x(P_x)$ și noi am văzut pe o altă cale că astfel de expresii nu sînt definisante.

Vom examina acum problema mai de aproape, în lumina concluziilor precedente. Se cunosc cîteva exemple care s-au dat — și numărul extrem de redus al acestor exemple n-a mirat pe nimeni — exemple de predicate care posedă ele însele proprietatea pe care o exprimă, cum sînt predicatele *abstract*, *imaginabil* și *determinat*. Spunem: predicatul *abstract* este abstract, deci el este *predicabil*; predicatul *imaginabil* este imaginabil, deci este *predicabil*; predicatul *determinat* este el însuși determinat, deci este *predicabil*; dimpotrivă, predicatul *mamifer* nu este el însuși un mamifer, deci este *impredicabil*.

Aici, nu ținem seama de următorul fapt: că toate predicatele (sau conceptele) sînt abstracte independent de conținutul pe care-l exprimă, deci predicatul *abstract* este abstract independent de conținutul particular „abstract" pe care-l desemnează; că toate predicatele (sau conceptele) sînt imaginabile, independent de conținutul pe care îl enunță, deci predicatul *imaginabil* este imaginabil independent de conținutul particular „imaginabil" pe care-l desemnează; că toate predicatele (sau conceptele) sînt determinate, independent de conținutul pe care-l enunță, deci predicatul *determinat* este determinat independent de conținutul particular „determinat" pe care-l desemnează; că nici un predicat nu este mamifer, independent de conținutul pe care-l enunță, deci predicatul *mamifer* nu este un mamifer, independent de conținutul particular „mamifer"

pe care-l desemnează etc. Aceasta rezultă imediat din faptul că dacă proprietatea de a-şi conveni drept predicat ar fi decurs din definiţia predicatului particular dat, atunci numai predicatul *abstract* ar putea fi abstract, numai predicatul *imaginabil* ar putea fi imaginabil, numai predicatul *determinat* ar putea fi determinat şi numai predicatul mamifer nu ar putea fi mamifer etc.

Lucrurile nu se petrec aşa şi toate predicatele sau conceptele au una dintre aceste proprietăţi sau toate nu o au, ca, de exemplu, predicatul mamifer este el însuşi, ca predicat, un predicat abstract, imaginabil şi determinat.

Să scriem predicatul, în general, punînd în evidenţă conţinutul său „ψ este un predicat" astfel:

$$Pr(\psi)$$

Se vede că, oricare ar fi conţinutul lui ψ, el nu ar schimba cu nimic noţiunea de predicat. Spunem că pentru valoarea particulară ψ_1 = abstract, sau ψ_2 = imaginabil, sau ψ_3 = = determinat etc., rezultă o proprietate pentru predicatul respectiv, adică *predicabil*, deoarece predicatul (în general) admite aceste proprietăţi. Altfel spus, coincidenţa arbitrară a conţinutului predicatului considerat cu una din prorietăţile predicatului (în general) este considerată ca fiind o proprietate specială a predicatului. Din această cauză, coincidenţa aceasta nu poate defini nimic. Să presupunem totuşi că luăm acest accident ca definisant pentru predicatele *predicabil* şi *impredicabil*, adică distingem predicatele care au cu totul din întîmplare această coincidenţă de cele care nu o au. Acest lucru poate fi făcut, dar în acest caz am definit predicatele *predicabil* şi *impredicabil* prin accident. Putem observa accidentul prin propoziţia: „predicatul *imaginabil* este imaginabil" sau lipsa acestui accident prin propoziţia „predicatul *mamifer* nu este un mamifer" etc., putem numi chiar aceste accidente prin *predicabil* şi *impredicabil*, dar nu trebuie uitat că aceste predicate sînt definite prin accident. Ca şi în cazul general precedent al paradoxului *compatibil — incompatibil*, dacă trecem predicatele *predicabil* şi *impredicabil* în seria predicatelor $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, care au o definiţie independentă de acest accident, de ordinea R(p), ele pierd accidentul care le defineşte şi nu mai sînt de loc definite.

Numărul foarte redus de predicate care sînt *predicabile* se explică acum prin faptul că proprietăţile „predicatului" însuşi sînt în număr mic: „predicatul" este un concept, abstract, imaginabil, determinat etc. Numai cu proprietăţile „predicatului" în general putem forma predicate *predicabile*. Dacă putem descoperi o altă proprietate generală a „predicatului", avem dintr-o dată un alt predicat *predicabil*.

De exemplu, putem spune că „predicatul" este o noţiune atributivă; deci predicatul „atributiv" este el însuşi atributiv, şi, în consecinţă, este *predicabil* etc.

Se vede deci că expresiile de forma $\psi(\psi)$ şi $\sim\psi(\psi)$ pot fi formate, deoarece putem întotdeauna exprima logic faptul că o entitate logică ψ are un accident sau nu îl are; dar expresiile $\psi(\psi)$ sau $\sim\psi(\psi)$ nu pot fi definisante, deoarece accidentul nu este un element definisant. Am explicat astfel rezultatul obţinut în soluţia formală a paradoxelor.

Aceleaşi observaţii se aplică, punct cu punct, în cazul paradoxului *izonom — heteronom* şi în cazul său particular, paradoxul *autologic — heterologic*.

Proprietatea unui cuvînt nu are nici un raport logic cu conţinutul pe care-l determină. Cuvîntul „scurt" este scurt, dar nu pentru că notează proprietatea *scurt*, ci cu totul din întîmplare. Nu există nici o legătură logică între forma grafică sau sonoră a unui cuvînt — sau a unui simbol, în general — şi noţiunea pe care el o reprezintă. Legătura dintre proprietăţile grafice sau sonore al unui cuvînt şi proprietatea reprezentată printr-un alt cuvînt sau prin acelaşi cuvînt este arbitrar stabilită, şi o proprietate constatată în felul acesta este o proprietate accidentală. Avem dreptul de a constata asemenea proprietăţi şi de a le exprima în propoziţii care au sens precis; dar aceste propoziţii, care exprimă proprietăţi accidentale, nu pot fi termeni definisanţi în nici o altă definiţie, deoarece o definiţie nu poate fi constituită printr-un accident. Astfel deci, predicatele *izonom* şi *heteronom* sau *autologic* şi *heterologic*, fiind definite printr-un accident, nu sînt absolut de loc definite.

Vom insista încă asupra paradoxului clasei claselor *compatibile* şi *incompatibile* şi, de asemenea, asupra cazului său particular, paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu se conţin ca element. Acest paradox este tocmai paradoxul *compatibil — incompatibil* tradus în termeni de clase. Legă-

tura arbitrară care stabilește ordinea R(p) face să corespundă unei clase α_x o clasă β_x; faptul că α_x ar aparține, eventual, ca element clasei β_x este considerat ca o proprietate iar faptul de a nu-i aparține, de asemenea ca o proprietate. Dar această corespondență între clase nu derivă din definiția clasei α_x sau din definiția clasei β_x, ci este în mod arbitrar aleasă, și proprietatea clasei α_x de a fi *compatibilă* sau nu cu clasa β_x este o proprietate accidentală.

Clasa claselor *compatibile* G și clasa claselor *incompatibile* Γ sînt clase ale căror elemente sînt definite în mod exclusiv prin accidentul *compatibil* sau *incompatibil* în ordinea R(p): deci clasele G și Γ sînt definite prin accident. Din moment ce ele sînt considerate independent de ordinea arbitrară R(p) care le definește și le trecem printre clasele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, și $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, care au, fiecare, o definiție în afara ordinei R(p) — ceea ce a permis însăși construcția ordinei R(p) —, ele pierd singurul lor element definisant și nu mai sînt definite.

În cazul particular al paradoxului lui Russell, problema a devenit și mai subtilă. Am văzut că clasa claselor care nu se conțin ca element $G = \hat{\alpha}(\alpha \in \alpha)$, ca și clasa claselor care nu se conțin ca element $\Gamma = \hat{\alpha}(\sim\alpha \in \alpha)$ nu sînt definite, căci expresiile $\alpha \in \alpha$ și $\sim\alpha \in \alpha$ nu sînt termeni definisanți. Această concluzie formală este perfect explicată prin examenul pe care l-am făcut paradoxului *predicabil — impredicabil*. Am văzut că faptul că predicatul *abstract* este el însuși abstract este o coincidență. Să presupunem totuși că am putea enumera, în mod practic, toate clasele care au acest accident, de a se conține ca element, și toate clasele care nu au acest accident; în acest caz, clasa G, clasa tuturor claselor care se conțin ca element, este definită prin accident, adică nici unul dintre membrii săi nu e definit, ci numai indicat; același lucru pentru clasa Γ a tuturor claselor care nu se conțin ca element. (Vom reveni asupra formării claselor definite prin accident, mai tîrziu.) Se vede deci că am putea, eventual, forma aceste colecții G și Γ, dacă membrii lor sînt în mod efectiv dați (pentru că ei nu sînt definiți) și numai în acest caz ele ar putea fi, în mod practic, formate. Dar clasele G și Γ au definiții accidentale și în momentul în care ele trec în rangurile claselor definite independent de ordinea R(p), ele nu sînt definite.

În consecință, și în acest caz, expresiile $\alpha \in \alpha$ sau $\sim \alpha \in \alpha$ pot avea un sens accidental precis, ca și expresiile în comprehensiune $\psi(\psi)$ sau $\sim \psi(\psi)$, dar ele nu pot fi termeni definisanți, tocmai pentru că ele sînt formate prin accident.

Ar fi inutil să continuăm această analiză pentru fiecare predicat care intră în construcția paradoxelor, căci ar însemna să repetăm, punct cu punct, ceea ce am spus deja, toate paradoxele avînd aceeași structură.

Rezultă deci că predicatele *compatibil — incompatibil* (și *predicabil — impredicabil*), *izonom — heteronom* (și *autologic — heterologic*), *izomorf — heteromorf* (și *richardian — non-richardian*), *congruent — incongruent* (paradoxul teoriei tipurilor), ca și clasa claselor *compatibile* sau *incompatibile* (și clasa claselor care nu se conțin ca element, sau clasa claselor care se conțin ca element) sînt predicate și clase construite prin accident într-un cadru sau într-o ordine aleasă în mod arbitrar. Dacă considerăm unul dintre aceste predicate sau clase, independent de ordinea care l-a creat, fiind deci considerat ca avînd o definiție propriu-zisă, el pierde definiția sa, deoarece pierde singurul element care îl definește, adică accidentul.

Căutați să vedeți dacă un predicat P_k (oricare ar fi el) luat izolat este *compatibil* sau *incompatibil*: predicatele *compatibil* și *incompatibil* nu mai sînt definite. Căutați dacă un cuvînt «C_k», luat izolat, este *izonom* sau *heteronom*; predicatele *izonom* și *heteronom* nu mai sînt definite etc.

Același lucru este valabil pentru mincinos. Definiția mincinosului, exprimată prin „eu mint", de a nega valorile de adevăr ale oricărei propoziții q, este o convenție arbitrară, pe care el are libertate de a o face, dar care nu rezultă cu necesitate din ideea de adevăr sau de falsitate. Din punct de vedere logic, definiția convențională a mincinosului este o definiție făcută prin accident. Să punem pe mincinos să mintă în el însuși: el nu mai este definit, deoarece accidentul care l-a definit (convenția arbitrară — el neagă orice propoziție a cărei valoare de adevăr este dată) nu mai există. Wittgenstein ([1], 6.51) scrie că scepticul își pune o problemă lipsită de sens, atunci cînd vrea să se îndoiască acolo unde nici o problemă nu se pune. Situația mincinosului din paradox este identică: îl obligăm să mintă acolo unde nimic n-a fost afirmat!

Calculul ne-a oprit să comitem erori de acest fel, impunînd prin teorema $T\omega$ sau D_1 și D_2, definițiilor de forma

$$P(x) =_{Df} \sim \psi(x),$$

relația $\psi \neq P$, ceea ce demonstrează că în aceste definiții generale, sau în cele particulare obținute pentru $x = \psi$, P nu poate exista printre valorile variabilei ψ. Un savant francez a spus că, calculul tensorial știe mai bine fizica decît un fizician; același lucru se poate spune și pentru logică: calculul logic știe mai bine logica decît un logician!

În loc de a constata această valabilitate restrînsă a predicatelor și claselor care intervin în problemele paradoxelor, Russell, ca și alți logicieni de după el, a tras concluzia că trebuie interzisă formarea unor astfel de predicate și clase, sacrificînd astfel propoziții care au un sens perfect determinat, ca: „predicatul mamifer nu este un mamifer".

După cum se știe, acela care a admis totuși existența acestor noțiuni, denumite non-predicative, a fost Ramsey. Din păcate, el a voit să le dea o bază filozofică, căci a afirmat că asemenea clase — de exemplu totalitatea tuturor proprietăților — există deja în sine și că numai limitarea puterii intelectuale a omului împiedică să fie enunțate într-o definiție logică, ceea ce nu ar constitui decît un fapt empiric, dar nu un fapt care ar putea afecta bazele cunoașterii însăși. Această concepție ne duce dintr-o dată în lumea cerească a ideilor platoniciene.

Este posibilă utilizarea proprietăților accidentale, dacă acest lucru se dovedește util și necesar la un moment dat, dar, mai ales, în cazul acestor proprietăți (sau clase) trebuie avută o extremă prudență, căci e foarte ușor să se ajungă la situații absurde.

Vedem deci că toate definițiile care introduc simple cuvinte, definițiile prin abreviere, definițiile convenționale, definițiile semnelor sau ale simbolurilor sînt definiții prin accident și ele trebuie să fie întrebuințate cu grijă.

În sistemele logice formale, ca și în matematică, se face un permanent uz de asemenea definiții. Într-adevăr, logica simbolică, operînd cu simboluri goale de orice conținut, este obligată, în general, să privească relația de definiție fără nici o legătură între *definiens* și *definiendum*. Definițiile apar astfel ca abrevieri convenționale ale expre-

siilor simbolice, sau, cum spune Russell însuși ([1], I, p. 12), „ca niște comodități tipografice": *„The definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences"*.

Această concepție a fost acceptată de către logicienii contemporani și Couturat conchide că „toate propozițiile unei teorii deductive pot fi considerate ca bazate, în definitiv, numai pe noțiunile indefinisabile ale teoriei", iar Carnap va scrie că toate definițiile servesc la abrevieri și nu sînt, în principiu, necesare. Aceasta înseamnă că toate definițiile sînt arbitrare, deci ele sînt formate prin accident, și că ele trebuie utilizate controlînd întotdeauna condițiile definiției cărora ele sînt supuse, căci altfel ele pot cu ușurință să degenereze în definiții *idem per idem* sau în definiții contradictorii. Aceasta nu s-ar putea întîmpla în cazul definițiilor propriu-zise, construite cu elementele proprii ale conotațiilor noțiunilor despre care e vorba, deoarece sensul însuși al acestor concepte și al relațiilor lor ar împiedica atunci comiterea unor astfel de erori.

Vom mai face o observație privitoare la „pseudoantinomiile", de tipul „străjerului" sau al „bărbierului satului". Prezența acestor antinomii nu a fost considerată ca supărătoare și au fost înlăturate cu ușurință, fiind considerate ca bazate pe convenții, deci susceptibile de a fi modificate. Se poate vedea cu ușurință că definițiile care intră în construcția „pseudoantinomiilor" sînt și ele formate prin accident și că mecanismul lor este, în consecință, identic cu mecanismul paradoxelor logico-matematice sau semantice.

2. Considerații asupra paradoxului lui Gödel

Rezultatele precedente se aplică cu exactitate și în cazul paradoxului lui Gödel. Dată fiind importanța acordată acestui paradox, îl vom examina mai îndeaproape. Am văzut că Gödel a construit o ordine *arbitrară* R în care a introdus definiția

$$n \in K = \overline{Bew}\,[R(n)\,;\,n] \quad . \text{ Def.} \qquad (1)$$

și care înseamnă „în ordinea R, numărul natural n aparține clasei K dacă pentru el formula [R(n) ; n] nu este demon-

strabilă". Am demonstrat cum se obține acest paradox plecînd de la această definiție.

Definiția lui Gödel este cea a paradoxului *izomorf — heteromorf*, al cărui caz particular este antinomia lui Richard. Am văzut că în acest caz teorema Tω devine, cu simbolurile respective,

$$T\omega \quad \vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q) ; q]$$

Definiția lui Gödel dă echivalența generală

$$\vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n) ;n] \qquad (2)$$

care cu Tω, printr-un *modus ponens*, ne duce la rezultatul:

$$\vdash \cdot [R(n) ;n] \neq [R(q) ;q]$$

Vedem deci că paradoxul lui Gödel este de tipul paradoxelor generale construite de noi.

Problema paradoxului lui Gödel este deci aceea a paradoxului *izomorf — heteromorf*, ceea ce era evident.

Dar mai vrem să insistăm asupra unui alt punct al problemei în raport cu definițiile făcute prin accident. Să examinăm mai amănunțit predicatele introduse de Gödel în această problemă, adică predicatele *demonstrabil — indemonstrabil*. Aceste predicate sînt — de asemenea — definite prin accident.

Într-adevăr, Gödel alege o ordine arbitrară R, în cadrul căreia definește predicatele *demonstrabil — indemonstrabil*, adică exact cum s-au definit predicatele *izomorf — heteromorf*: prin accident.

Acest caracter al predicatelor *demonstrabil — indemonstrabil* poate fi mai bine observat într-un sistem logic formal cum e *Principia Mathematica*. O propoziție adevărată este o tautologie în logica lui Russell, adică ea este adevărată în ea însăși. Demonstrarea unei tautologii este accesorie și nu este necesară pentru stabilirea adevărului său, tautologia fiind adevărată independent de demonstrația sa.

Așa cum spune Wittgenstein ([1], 6.1262) referindu-se la însăși ideea de demonstrație: „Demonstrația în logică este numai un mijloc auxiliar mecanic pentru a recunoaște mai ușor tautologia acolo unde ea este complicată".

„Natural, acest mod de a demonstra că propoziţiile sale sînt tautologii este absolut non-esenţial pentru logică. Din această cauză propoziţiile de unde începe demonstraţia trebuie să arate fără demonstraţie că ele sînt tautologii" ([1], 6.126). Astfel deci, predicatele *demonstrabil* sau *indemonstrabil* nu sînt în mod esenţial legate de o propoziţie, ceea ce ar face, în caz contrar, ca simplul ei enunţ să conţină ca predicat fie predicatul *demonstrabil*, fie predicatul *indemonstrabil* (ca elemente esenţiale ale definiţiei sale), ceea ce ar face propoziţia adevărată sau falsă în ea însăşi, adică fără demonstraţie, ceea ce este contradictoriu.

Este de remarcat că alţi logicieni, de asemenea, s-au izbit de aceeaşi dificultate, căutînd o definiţie a „demonstrabilităţii" în raport cu adevărul unei propoziţii. Iată ce scrie Tarski cu privire la aceasta ([1], p. 304): „Extensiunea celor două concepte considerate (adevăr şi demonstrabilitate) nu este identică; toate propoziţiile demonstrabile sînt, fără îndoială, — din punctul de vedere al conţinutului lor — propoziţii adevărate, dar definiţia propoziţiei adevărate pe care noi o căutăm trebuie să cuprindă şi propoziţiile care nu sînt demonstrabile". Şi el adaugă ceva mai departe: „Trebuie să luăm în consideraţie aici circumstanţa că — în opoziţie cu conceptul propoziţiei adevărate — conceptul propoziţiei demonstrabile în aplicarea cîtorva ştiinţe deductive posedă un caracter pur fortuit".

Vedem deci că predicatele *demonstrabil — indemonstrabil* sînt legate în mod accidental de propoziţiile sistemului *Principia Mathematica* (sau sistemele înrudite) şi din această cauză putem construi asemenea definiţii, ca aceea a lui Gödel, care conduce la un paradox, exact cum se petrec lucrurile în celelalte paradoxe.

*

Primul care a observat că rezultatul obţinut de Gödel nu era altceva decît o nouă antinomie este Ch. Perelman. În articolul său *L'antinomie de M. Gödel* (Bruxelles, 1936), după ce a demonstrat în mod formal că problema pusă de Gödel se reduce la un paradox (Perelman a utilizat pentru aceasta o metodă proprie) el scrie:

„Afirmînd în articolul său că demonstrația sa era înrudită cu aceea a paradoxelor, dl. Gödel spunea prea puțin. În fapt avem o nouă antinomie, avînd în mod identic aceeași structură ca și paradoxele cunoscute. Și, ca și în paradoxele clasice, acela pe care dl. Gödel l-a construit în celebrul său articol rezultă dintr-o contradicție introdusă în premise".

Această concluzie este indiscutabil adevărată, dar ea nu răspunde la toate pretențiile așa-numitei „teoreme" a lui Gödel. În adevăr, i s-a opus lui Perelman faptul că expresia construită de Gödel este indecidabilă, adică ea poate fi formată în mod corect în interiorul sistemului aritmetizat dat, dar ea nu poate fi „decisă" în însuși sistemul dat.

Cu alte cuvinte — după cum observă Ladrière în lucrarea sa *Les limitations internes des formalismes* (1957) — „Gödel s-a aranjat așa fel ca să poată construi o propoziție de formă circulară fără ca aceasta să conducă la o contradicție".

Expresia lui Gödel

$$[R(q) ; q]$$

este indeterminabilă în sistemul lui Russell aritmetizat (sau în sisteme înrudite), dar ea nu e direct contradictorie în ea însăși, după cum am și văzut. Această concluzie ar duce, după Gödel, la un rezultat mult mai important, fiindcă ar arăta că orice sistem formal este lacunar.

Iată în rezumat ceea ce se răspunde criticii făcute de Perelman.

Teza lui Perelman a fost reluată de M. Barzin în articolul său *Sur la portée du théorème de Gödel* (Bruxelles, 1940), în care autorul său ajunge la aceeași concluzie, dar pe altă cale, arătînd și el că Gödel a introdus în mod aparent invizibil o contradicție pe care se bazează expresia construită de el.

Acei care au respins critica lui Perelman au trecut pe lîngă o observație care se impune cu necesitate aici : nimeni nu s-a întrebat care este natura logică a acestei expresii cu care se poate construi un paradox ?

Această expresie posedă un caracter cu totul diferit de celelalte expresii ale sistemului, pentru că cu nici una dintre ele nu se poate construi un paradox, ci numai cu o expresie de acest tip. Nu putem separa expresia de con-

secințele contradictorii care rezultă din utilizarea ei, în afară de cazul în care vrem în mod intenționat să închidem ochii. În acest sens critica lui Perelman își atinge obiectivul cu toată forța ei logică.

Dar chiar dacă s-ar putea respinge complet critica lui Perelman, nu s-ar putea renunța la această întrebare: prin ce se distinge expresia „indecidabilă" de celelalte expresii ale sistemului, în structura ei logică? Să admitem că s-ar fi dovedit „indecidabilitatea" expresiei formulate de Gödel; „indecidabilitatea" acestei expresii se datorește structurii ei logice, în tot cazul, unui caracter particular pe care ea îl posedă și pe care toate celelalte expresii „decidabile" ale sistemului nu îl posedă. Care este acest caracter? Dacă am descoperi acest caracter specific, am avea în același timp explicația apariției acestei expresii „indecidabile". Dar nimeni nu și-a pus această problemă.

Sîntem însă acum în măsură să explicăm în mod complet acest paradox. În adevăr, expresia

$$[R(q)\,;\,q]$$

(sau altele de același tip) este construită prin accident, în același mod ca și expresiile $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$, sau încă $\alpha \in \alpha$ sau $\sim\alpha \in \alpha$, și în general, expresiile care intră în paradoxe sau *cu care se pot construi paradoxe*.

Expresia $\sim\varphi(\varphi)$, de exemplu, apare în sistemul *Principia Mathematica*, și am văzut că ea nu este contradictorie, ci numai construită prin accident, din care cauză nu este definisantă. Să presupunem că aritmetizăm sistemul *Principia Mathematica* și că formăm expresia $\sim\varphi(\varphi)$, care va fi atunci o serie de numere naturale. Această serie nu se poate găsi printre seriile de numere naturale care constituie sistemul *Principia Mathematica*. De ce? Pentru că nici o proprietate accidentală nu poate fi demonstrată în mod teoretic, deoarece ea nu poate fi decît rezultatul unei constatări empirice. Dar aceeași serie de numere naturale nici nu poate fi exclusă din sistemul considerat pe cale teoretică, pentru același motiv (vezi cap. VII, 1). Prin urmare, dacă construim expresii prin accident, ele nu pot fi „decise" în sistemul în care sînt construite, fiindcă asemenea expresii au o bază de fapt și nu o bază logico-teoretică.

Am găsit însă, scriind definiția lui Gödel și formula Tω :

$$\vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n); n]$$

$$T\omega \quad \underline{\vdash : (n) \cdot n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]}$$

$$\vdash \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]$$

Cu alte cuvinte, dacă nu respectăm această ultimă neidentitate, clasa K nu este definită.

Astfel, rezultatul lui Gödel poate fi enunțat în modul următor :

În sistemul Principia Mathematica sau în sisteme înrudite, se pot construi întotdeauna expresii prin accident, care sînt indecidabile în mod teoretic, dar care ar putea fi decidabile numai într-un mod empiric (printr-o examinare de fapt).

Acest rezultat este nul fiindcă nu aduce nimic nou : el este identic cu rezultatul unic al tuturor paradoxelor, care nu spun nimic.

Să rezumăm acum pe puncte argumentarea noastră.

1. Ordinea în care Gödel numerotează semnele sistemului este arbitrară. Deci, orice expresie a sistemului, care este definită numai prin seria arbitrară a numerelor atribuite simbolurilor din care e formată, este definită prin accident.

2. Orice proprietate a unei asemenea expresii, care ar rezulta pentru ea din poziția ei particulară în interiorul sistemului, poziție determinată prin seria formată de numerele simbolurilor sale, este o proprietate accidentală. (De exemplu, se poate defini mulțimea tuturor expresiilor sistemului ale căror serii de numere întregi corespunzătoare conțin grupul 33 ; dar orice proprietate stabilită pe această particularitate este o proprietate accidentală și mai mult nu este definisantă.)

3. Demonstrația unei expresii într-o teorie deductivă nu este o proprietate a acestei expresii ; „demonstrabil" nu este un predicat care poate fi atribuit unei expresii înaintea demonstrației ei, pe baza numai a structurii ei ; dacă acest lucru ar fi posibil, atunci o propoziție căreia i s-ar putea atribui predicatul „demonstrabil" înainte de a fi demon-

strată, ar fi adevărată fără demonstrație, ceea ce este absurd.

Dar demonstrația unei expresii într-o teorie deductivă nu constituie un caracter izolat al acestei expresii.

Demonstrația nu este o proprietate, ci o operație, prin care, fiind date anumite reguli, se stabilește o conexiune între o expresie și corpul expresiilor deja admise într-o teorie. Demonstrația posedă astfel un caracter *operațional constructiv*. Goblot a spus-o de mult timp: „A demonstra înseamnă a construi" (*Démontrer c'est construire*). Și mult înaintea lui, Kant a făcut o teorie complexă a caracterului constructiv al demonstrației, pentru a nu mai cita și alți logicieni care au avut aceeași concepție despre natura demonstrației.

De aceea „demonstrația" nu poate fi atribuită unei expresii în mod izolat, ca un predicat, deoarece ea nu depinde exclusiv de expresia dată, ci, de asemenea, de toate expresiile teoriei care servesc la demonstrația expresiei considerate. Fără îndoială, putem spune că o expresie demonstrată este „demonstrabilă", dar aceasta nu înseamnă decît un nume acordat *post festum*, adică după demonstrație, căci mai înainte nu avem dreptul să i-l dăm. Și chiar atunci, acest nume ar păstra un caracter neesențial (Wittgenstein) și fortuit (Tarski), ca orice nume.

4. Expresiile definite prin accident nu pot fi „decise" în mod teoretic în sistemul în care ele au fost formate, pentru că nici o expresie definită prin accident nu poate fi „decisă" teoretic, ci numai printr-o constatare de fapt.

5. Expresia construită de Gödel, citată de noi

$$[R(q) ; q],$$

ca și oricare expresie de tipul acesta, este definită numai prin numărul său, în ordinea relativă creată de Gödel, deci este definită prin accident. Ea nu este decidabilă, dar această *Unentscheidbarkeit* nu este datorită limitărilor interne ale formalismelor logico-matematice, ci structurii ei logice care este creată printr-o definiție accidentală.

6. În ceea ce privește pe cei care au răspuns criticii lui Perelman, făcînd o distincție între enunțurile unui sistem și enunțurile metateoretice relative la același sistem, și care au reproșat lui Perelman că nu a ținut seamă de această

distincţie, cum sînt, de exemplu, Kleene, Church etc., aceştia comit o *ignoratio elenchi*. Distincţia la care se referă aceşti logicieni serveşte să soluţioneze dificultatea, după ce ea s-a produs, ea constituie „o soluţie" convenţională a problemei.

Dar la aceasta mai avem de adăugat că dacă se ţine seama de pasajul din *Organon*-ul lui Aristotel pe care l-am citat (vezi cap. VI), după care „este absurd să se presupună că există argumente care se raportează la cuvinte şi altele, la gîndire, deci că ele nu ar fi identice", distincţiile de felul acesta îşi pierd caracterul lor logic. În adevăr, logica formală este independentă de conţinutul, de materia relativă la care se aplică ; deci conţinutul nu poate determina în nici un mod o distincţie de natură logico-formală. Această idee a fost exprimată cu toată forţa de un singur logician al epocii noastre, de către Ludwig Wittgenstein, cînd a făcut critica teoriei tipurilor în *Tractatus* (prop. 3. 328) :

„În sintaxa logică semnificaţia unui semn nu trebuie să joace nici un rol". Şi mai departe (prop. 3. 331) : „Obţinem o înţelegere mai completă asupra *Teoriei tipurilor* a lui Russell : eroarea lui Russell constă în faptul că, stabilind regulile semnelor, el trebuie să vorbească de semnificaţia acestor semne".

Şi pentru a vedea că dacă se stabileşte o împărţire „logică" a simbolurilor şi a expresiilor simbolice, în expresii „logice" şi „metalogice", s-a părăsit domeniul pur formal şi s-a intrat în conţinutul expresiilor cărora se aplică simbolurile, Wittgenstein însuşi arată consecinţele absurde la care cu necesitate trebuie să se ajungă pe această cale (prop. 6.123) : „Este clar că legile logice nu trebuie să asculte şi de alte legi. (Nu există, cum credea Russell, pentru fiecare «Type» o lege specială de contradicţie. . .)".

Dar aceasta este o altă problemă care merită să fie discutată în mod separat.

3. Pseudoclasa non—A

În aceste probleme am întîlnit clasa A şi clasa contrară non-A (complementul lui A din teoria mulţimilor). În acelaşi fel am considerat un predicat ψ, iar dacă o entitate

logică x nu avea predicatul ψ îi acordam un predicat negativ P. Vrem acum să ne ocupăm de aceste clase de forma non-A sau, dacă considerăm problema în comprehensiune, să vedem dacă non-atribuirea unui predicat unei entități logice x exprimă cu adevărat o predicație.

Definiția unei clase este: „toți aceia care fac adevărată o funcție propozițională f(x)". Sau, mai simplu: „O clasă (sau mulțime) este o colecție de elemente care admit, toate, același predicat".

Calculul claselor a acceptat încă o clasă, în raport cu un predicat dat f: funcția propozițională f(x) definește clasa $\hat{x}(fx)$, dar ea definește și clasa tuturor elementelor care nu verifică funcția f(x), notată „$\hat{x}(fx)$". O funcție propozițională (cu un singur argument) determină astfel două clase, clasa A și clasa non-A, non-A fiind formată din „toți cei care fac falsă funcția f(x)":

$$A = \hat{x}(fx)$$

$$\text{non-}A = \hat{x}(\sim fx)$$

Russell și Carnap au spus mai simplu: o clasă este extensiunea unui predicat, ceea ce face din noțiunea de clasă sau de mulțime noțiunea logică tradițională de extensiune a unui concept (*Umfang*). Clasa A este extensiunea predicatului f; dar, în acest caz, clasa non-A este extensiunea cărui predicat? Care este predicatul comun tuturor elementelor care nu admit același predicat f? Am ajuns astfel la dilema următoare: dacă non-A este o clasă, atunci definiția dată („toți cei care verifică f(x)") nu este definiția clasei; dacă păstrăm în mod riguros această definiție, atunci non-A nu poate fi o clasă.

Această lipsă de precizie, în ceea ce privește conceptul de clasă și în special clasa non-A, poate fi regăsită în toate tratatele de logică sau de matematică; citim, de exemplu, într-un tratat de algebră, de o valoare incontestabilă, cum e cel al lui B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* [1]: „Gîndim, ca punct de plecare al tuturor considerațiilor matematice, anumite obiecte reprezentabile, ca, de exemplu, semnele numerelor, literele sau combinațiile acestora. O proprietate, pe care fiecare dintre aceste obiecte o are, în particular, sau nu o are, definește o mulțime sau o clasă;

elementele mulţimii sînt obiectele cărora convine această proprietate". Iată deci, confuzia de care am vorbit: o proprietate pe care fiecare dintre aceste obiecte o are sau nu o are defineşte o mulţime sau clasă; elementele acestei mulţimi sînt obiectele cărora această proprietate convine. Care?

Desigur, matematicienii au libertatea de a alege noţiunea de mulţime sau clasă, după bunul lor plac; dar ea trebuie să fie aleasă şi o dată aleasă ea nu poate fi altceva decît ceea ce ea este. Putem spune chiar că $\hat{x}(fx)$ şi $\hat{x}(\sim fx)$ reprezintă, fiecare, o clasă; dar, în acest caz, clasa $\hat{x}(fx)$ şi clasa $\hat{x}(\sim fx)$ nu mai pot fi definite printr-o definiţie unică, „toţi cei care verifică f(x)" şi trebuie introdusă o definiţie pentru clasa $\hat{x}(\sim fx)$, adică „toţi cei care nu verifică funcţia f(x)" ceea ce nu este acelaşi lucru. Se vede astfel că, în general, dacă considerăm o funcţie cu un singur argument f(x), cele două clase $\hat{x}(fx)$ şi $\hat{x}(\sim fx)$ nu pot fi constituite bazîndu-ne pe o definiţie unică a noţiunii de clasă şi, prin urmare, colecţiile $\hat{x}(fx)$ şi $\hat{x}(\sim fx)$ nu pot fi caracterizate, amîndouă, prin acelaşi concept „clasă" cu acelaşi sens.

Să considerăm o clasă determinată, de exemplu, clasa „om"; un element x aparţine acestei clase, dacă putem scrie pentru el:

$$x \in \text{om}$$

Toţi x care fac adevărată această funcţie propoziţională formează clasa om: $\hat{x}(x \in \text{om})$. Clasa non-A, în cazul prezent non-om, nu exprimă extensiunea nici unui predicat. Cînd scriem

$$x \in \text{non-om}$$

sau, în general

$$x \in \text{non-A}$$

nu am indicat nici o totalitate de elemente care pot fi reunite împreună bazîndu-ne pe o proprietate comună. Clasa non-om — şi, în general, clasa non-A — nu exprimă nimic mai mult decît că există elemente care nu au proprietatea comună elementelor clasei om, sau ale clasei A. *Dar cum să*

afirmăm că toate aceste elemente au o proprietate comună numai din faptul că ele nu au o proprietate comună? În afară de clasa om, deci în colecţia numită clasa non-om, există elemente complet heteroclite : arbori, mamifere, numere prime, metale, ecuaţia lui Laplace etc. Care este proprietatea lor comună care le reuneşte într-o clasă?

Aristotel a observat că, clasa non-A nu este definită. Într-adevăr, citim ([1], *De Interpretatione*, 2, 20) : „Cuvîntul este un sunet vocal posedînd o anumită semnificaţie convenţională". Şi mai departe: „Non-om nu este un cuvînt. Nu există, într-adevăr, nici un termen pentru o asemenea expresie, căci ea nu este nici discurs, nici negaţie. Putem admite că este numai un cuvînt nedefinit (pentru că el aparţine la orice, la ceea ce este şi la ceea ce nu este)".

În consecinţă, luînd *tale quale* expresia „non-A", ea nu este o clasă, deoarece nu există nici un element comun aparţinînd conotaţiei fiecărui element din această colecţie, care ar autoriza reunirea lor într-o clasă. Să ne fixăm atenţia asupra clasei om: atunci, rămîne o colecţie de elemente eterogene non-om şi nu este de loc nevoie, aşa cum vrea Brouwer, să putem indica toţi membrii acestei colecţii pentru a avea în mod real o clasă, deoarece este suficient să luăm numai două elemente din această colecţie şi să observăm că nu au nici un element comun al conotaţiilor lor pentru a şti că am reunit în mod arbitrar *toate* elementele acestei colecţii într-o clasă. Modul de formare a unei asemenea clase este deci: se ia o clasă oarecare A, extensiunea unui predicat bine definit; apoi se consideră, în mod arbitrar, un element oarecare şi dacă el nu admite predicatul A, ceea ce nu are nici o legătură în acest caz cu elementul considerat, atunci acest element aparţine clasei non-A ; spunem apoi că toate elementele care nu admit *concomitentul* A formează o clasă non-A. De exemplu, în cazul nostru non-om, să luăm diverse obiecte care nu sînt „om" : peştele nu este om, numărul π nu este om, luna nu este om, ecuaţia lui Pell nu este om etc. ; pentru toate aceste elemente care nu au predicatul om, predicatul om, neavînd nici un raport cu conotaţia lor, este un accident, şi constatăm că ele nu au acest accident. Astfel deci, clasa non-A este definită prin accident şi, mai ales, prin faptul că elementele sale nu au acest accident.

Din punct de vedere logic ea nu este absolut de loc definită, deoarece o definiţie nu poate fi construită prin accident şi, *în mod special, prin lipsa unui accident.*

Este adevărat că în anumite cazuri particulare şi bine determinate, dacă în interiorul unei clase date A există numai două clase, a şi b, în mod precis definite, fiecare, putem construi clasele a şi non-a care sînt, de data aceasta, bine definite. Să spunem atunci că „x aparţine clasei non-a" înseamnă „x aparţine clasei b".

De exemplu, numerele raţionale au numai două subclase: clasa întregilor şi clasa fracţiilor raţionale. Să notăm clasa numerelor întregi cu a şi clasa fracţiilor raţionale cu b. Dacă acum afirmăm (sau demonstrăm) că: 1) x este un număr raţional; 2) că el nu aparţine clasei a; 3) atunci x aparţine în mod necesar clasei b. Dar b este clasa tuturor numerelor raţionale care nu sînt întregi, deci ea este clasa non-a. În alte cuvinte, în acest caz expresiile „$x \in$ non-a" şi „$x \in b$" sînt identice, dar numai în acest caz. În consecinţă, numai în cazul anumitor determinări precise, o clasă non-a, în interiorul unei alte clase A, poate avea o semnificaţie definită şi elementele sale să fie reunite într-o colecţie, deoarece ele au o proprietate comună. În cazul general, clasa non-A are nici o semnificaţie, nefiind decît un „cuvînt nedefinit", aşa cum a afirmat-o Aristotel. Nu putem să gîndim sub „clasa non-A" o colecţie constituită în clasă, deoarece accidentul nu are puterea logică de a opera această reuniune, ci numai de a indica „că există elemente care nu aparţin clasei A". *Aceasta înseamnă că propoziţia „x nu aparţine clasei A" poate fi aplicată numai într-o manieră distributivă, fiecărui x dat, şi nu în mod colectiv.*

Aceeaşi observaţie poate fi făcută şi în problema predicatelor negative. Aristotel s-a ocupat pe larg de problema predicatelor negative ([1], *Analytica Priora,* I, 46). El scrie, examinînd termenii definiţi şi termenii nedefiniţi: „În stabilirea sau respingerea unei concluzii, există o diferenţă, după care considerăm ca identică sau ca deosebită semnificaţia expresiei *a nu fi aceasta* şi *a fi non-aceasta* : de exemplu, *a nu fi alb* şi *a fi non-alb.* Într-adevăr, sensul nu este acelaşi, dar, pe de altă parte, negarea lui *a fi alb* nu este *a fi non-alb,* ci *a nu fi alb*". Simpla afirmaţie „x nu are predicatul P" nu atribuie lui x un predicat, deoarece din faptul că x nu veri-

fică funcția propozițională P(x) nu rezultă pentru x o proprietate. Avem exact problema precedentă văzută în comprehensiune. Vedem acum, în mod limpede, care era eroarea comisă în paradoxe: se introducea o proprietate P, pe care o entitate logică x ar fi avut-o ca consecință din simplul fapt că x avea o proprietate ψ aleasă la întîmplare (concomitentul) sau nu o avea. *Dar faptul de a avea pur și simplu o proprietate nu constituie prin el însuși o altă proprietate; faptul de a nu avea pur și simplu o proprietate nu constituie prin el însuși o proprietate nouă.* Același lucru pentru clase: *simplul fapt de a aparține unei clase nu constituie prin el însuși o altă proprietate, de a aparține unei alte clase.*

Dacă din simplul fapt că un lucru oarecare x nu admite un predicat P ar rezulta că x ar admite un predicat Q, atunci, deoarece x nu admite un număr imens de predicate, ar rezulta că x admite un număr imens de predicate, ceea ce este absurd.

Am văzut, de altfel, că regulile silogismului, care exprimă mecanismul predicației, arată că dacă una dintre premise este negativă, concluzia trebuie să fie negativă, chiar într-un silogism incomplet, cum ar fi *entimema*. În consecință, din simplul fapt că noi afirmăm că x nu are predicatul P

$$\vdash \cdot \sim P(x),$$

(oricare ar fi P) nu poate să rezulte, eventual și într-un mod general, decît o singură propoziție de asemenea negativă:

$$\vdash \cdot \sim Q(x),$$

în afara cazurilor particulare bine definite.

În același fel, din simplul fapt că afirmăm că x nu aparține unei clase A

$$\vdash \cdot \sim x \in A$$

(oricare ar fi A) nu rezultă că x aparține altei clase B, ci, eventual, cel mult, că el nu aparține unei clase B:

$$\vdash \cdot \sim x \in B$$

Este adevărat că avem libertatea de a introduce, pentru aceste fapte, semne de abreviere, atît pentru faptul că x nu are un predicat ψ, cît şi pentru faptul că o clasă α nu aparţine unei alte clase β. Dar aceste semne de abreviere sînt convenţionale şi nu derivă ca proprietăţi din definiţiile lui x şi ψ, sau ale lui α şi β, ci au definiţii construite prin accident, adică nu sînt, de fapt, definite.

4. Despre formarea anumitor clase prin accident şi intuiţionismul lui Brouwer

Richard este singurul care a observat că clasele care intervin în problema paradoxelor nu sînt definite. Acest fapt vroia să-l ilustreze paradoxul construit de el. Din păcate, observaţia lui, justă în fond, era insuficientă în ceea ce priveşte simbolismul logic, pentru că ea nu putea să explice cum trebuie ajustat simbolismul logic pentru a pune în vigoare această observaţie. Observaţia lui Richard n-a fost luată în serios decît de Poincaré [1] (şi mai poate fi citat Lucas de Pesloüan care a insistat asupra soluţiei lui Richard). Cercetările noastre au arătat că există cazuri în care considerăm ca definite lucruri care sînt caracterizate exclusiv printr-un accident, ceea ce înseamnă că ele nu sînt de loc definite. E adevărat că o caracterizare accidentală nu e chiar nimic şi că putem cîteodată forma anumite clase sau constata anumite determinări printr-un simplu accident. Putem, de exemplu, forma clasa următoare: „obiectele din camera de lucru a domnului D., strada N, numărul n, inclusiv domnul D. el însuşi". Fie aceste obiecte, o masă, patru scaune, un covor, un tablou, o călimară, două tocuri, două creioane, o bibliotecă, 843 de cărţi şi domnul D.

Această clasă este complet determinată, fără nici o legătură cu definiţiile acestor elemente. Accidentul este aici „Camera domnului D., strada N, numărul n": nu e necesar ca toate aceste obiecte să se găsescă împreună şi în acest loc. Acest exemplu ne arată că, dată fiind o serie de elemente eterogene, putem forma o clasă cu aceste elemente, bazîndu-ne pe un accident pe care-l putem alege arbitrar; dar nu trebuie pierdut din vedere că definiţia unei asemenea clase este o definiţie construită prin accident

şi că în consecinţă nici un membru nu e definit prin acest accident. Din definiţia „obiectele din camera domnului D, strada N, numărul n şi domnul D. el însuşi” nu putem deduce obiectele care se află în această cameră. Dacă obiectele n-ar fi dinainte date, colecţia nu ar fi constituită. Urmează că în clasele formate prin accident toţi membrii trebuie să fie în prealabil şi individual daţi. Deci:

În clasele formate prin accident, cuvîntul „toţi” nu are un sens colectiv, ci un sens distributiv: elementele unei asemenea clase nu aparţin colecţiei ca formînd în mod colectiv extensiunea unui aceluiaşi predicat, ci sînt elemente cărora li s-a distribuit accidental o proprietate care nu face parte din conotarea nici unuia dintre aceste elemente.

Observaţia că particula „toţi” — *omnes* — are două sensuri — colectiv şi distributiv — a fost făcută încă de logicienii scolastici, după cum am remarcat-o la timpul său, deşi ei nu au putut să explice cum apar aceste două sensuri diferite şi în ce cazuri. În tratatele lor despre *Syncategoremata* se pot găsi numeroase exemple care pun în lumină cele două sensuri ale lui *omnis*.

În rezumat, concluzia noastră este: în orice colecţie definită prin accident, apartenenţa sau non-apartenenţa unui element la această colecţie nu poate fi stabilită decît în mod individual, dînd elementul colecţiei, pentru că numai astfel se poate constata dacă elementul dat posedă concomitentul sau nu îl posedă. Dacă definim clasa mamiferelor, orice membru al acestei clase este definit prin definiţia generală a predicatului mamifer; dacă vrem apoi să formăm colecţia non-mamifer, nici un membru al acestei colecţii nu e definit. Pentru a putea forma această colecţie ar trebui să constatăm direct, examinînd pe rînd fiecare element, că nu are concomitentul dat. De exemplu, „ecuaţia lui Laplace” aparţine colecţiei „non-mamifer”, dar acest element nu poate fi dedus din „non-mamifer” în nici un fel. Această obligaţie este aceeaşi pentru colecţiile finite sau infinite. Putem oricînd forma o colecţie prin accident dacă dăm în prealabil membrii ei, chiar dacă ei sînt absolut heterocliţi. Să presupunem că cineva îşi fixează atenţia asupra obiectelor următoare: un briceag, ecuaţia lui Laplace, dicţionarul său latin, stejarul din curte şi clasa numerelor imaginare, şi scrie numele fiecăruia dintre aceste lucruri

pe o foaie de hîrtie; în acest moment „clasa obiectelor înscrise pe această listă” este perfect determinată, creată prin acest accident; dar trebuie ca toate aceste obiecte să fie date pentru a putea fi arbitrar colecţionate într-o clasă.

Deci:

Pentru a forma o clasă definită prin accident (finită sau infinită) trebuie să indicăm toţi membrii ei, unul cîte unul, caracterizaţi de acest accident, altfel clasa nu este constituită.

Este adevărat că în cazul colecţiilor infinite definite prin accident, această exigenţă nu poate fi satisfăcută niciodată, deoarece nu putem indica niciodată pe toţi cei care au acelaşi accident, sau nu îl au, în timp ce, în domeniul colecţiilor finite, putem indica eventual toate elementele care au un acelaşi accident. *Faptul logic care determină această condiţie nu este natura finită sau infinită a colecţiei, ci natura definiţiei sale făcute prin accident:* formarea unei asemenea clase care nu se bazează pe o definiţie logică, trebuie să aibă o bază de fapt. Deci colecţiile infinite definite prin accident, ca, de exemplu, clasa non-A, nu pot fi constituite, cu toate că am putea determina, dacă ni se dă un element oarecare, dacă el aparţine acestei colecţii sau nu, adică dacă are sau nu accidentul.

Rezultatele obţinute ne explică, în acelaşi timp, ceea ce au încercat să descifreze Brouwer şi intuiţioniştii în legătură cu clasele formate în acest fel, dar nu au reuşit, deoarece ei nu au sesizat adevărata natură a problemei. Pentru Brouwer, după cum am văzut, o propoziţie are un conţinut dacă este legată de intuiţia noastră imediată, de o anume stare de lucruri. Deci propoziţia „x aparţine mulţimii K” nu are sens decît dacă se poate indica practic elementul x. Fie propoziţia *a*: „fiecare element al mulţimii K are proprietatea P”; dacă mulţimea K este infinită, atunci negaţia propoziţiei „*a* este falsă” nu satisface principiul brouwerian, deoarece nu avem posibilitatea să arătăm, pentru o infinitate de lucruri, faptele care se opun ca ele să aibă proprietatea P.

Aceste observaţii conţin un embrion de adevăr pe care intuiţioniştii l-au sesizat, dar pe care nu au ştiut să-l formuleze.

Observaţia logică este mult mai simplă. Dacă Brouwer ar fi ţinut seama de faptul că un concomitent (accident)

nu poate fi constatat decît dacă se indică în prealabil lucrul care se presupune că are accidentul, adică, accidentul nu reprezintă nici o determinare pentru nici un lucru, decît dacă lucrul este complet dat prin propria sa definiţie, atunci exigenţa sa ar fi putut fi exprimată astfel: dacă este dat un predicat P şi propoziţia *a* „fiecare element al mulţimii K are predicatul P", atunci „*a* este falsă" sau „x nu este accidentul lui P", sau „x nu aparţine mulţimii K" nu pot fi declarate adevărate sau false decît dacă elementul x este practic dat. Mai precis, exigenţa lui Brouwer ar putea fi formulată astfel: apartenenţa sau non-apartenenţa unui element x la o mulţime formată prin accident nu poate să rezulte din definiţia unei astfel de mulţimi, definiţie care nu există, ci din faptul că x este dat, deoarece asemenea mulţimi nu sînt constituite prin definiţii, ci prin elemente *date* care au un accident oarecare, independent de faptul că mulţimea este finită sau infinită. Să reluăm exemplul precedent: mulţimea formată de „obiectele din camera domnului D., strada N, numărul n, şi domnul D. el însuşi". Din faptul că afirm că un obiect x aparţine acestei mulţimi nu rezultă nici o determinare pentru x; din faptul că x este „unul din obiectele care se găsesc în biroul domnului D." nu rezultă cine este x, adică, natura sa. Dar dacă afirm, de exemplu, „x aparţine mulţimii mamiferelor", atunci ştiu precis că x este un vertebrat, că are sîngele cald, pielea acoperită de peri, femelele avînd glande speciale numite mamele etc. Ceea ce nu este acelaşi lucru.

Acesta este faptul logic pe care concepţia intuiţionistă nu a reuşit să-l descifreze, cu toate că ea s-a apropiat foarte mult de unul din aspectele problemei.

Pentru a ilustra concluziile precedente, să examinăm un paradox pe care îl citează Reichenbach [1] şi care, tocmai pentru că este un exemplu concret, va lămuri complet problema formării unei clase prin accident. Vom prezenta paradoxul, sub forma cea mai naturală, după cum urmează.

Fiecare bibliotecă publică a unei ţări posedă un catalog al tuturor cărţilor pe care le are, al tuturor broşurilor, stampelor, manuscriselor etc. Orice carte, broşură, manuscris etc. este înregistrat la un număr determinat în catalog. Există biblioteci care înregistrează şi catalogul de inventariere, caz în care catalogul însuşi este citat în cata-

log; există biblioteci care nu înregistrează catalogul în inventarele lor, deci catalogul nu se menţionează el însuşi. Putem spune, deci: orice catalog al unei biblioteci publice se menţionează el însuşi sau nu se menţionează el însuşi, *tertium non datur*. Să presupunem acum că direcţia unei biblioteci oarecare îşi propune să adune toate cataloagele bibliotecilor din ţară şi să redacteze un catalog al cataloagelor care nu se menţionează ele înşile. Problema este perfect definită, are un sens precis şi este, practic, realizabilă.

Să notăm cu G catalogul cataloagelor care se menţionează ele însele şi cu Γ catalogul cataloagelor care nu se menţionează ele însele. Să examinăm catalogul Γ: acest catalog trebuie şi el să se menţioneze sau să nu se menţioneze, *tertium non datur*. În cazul în care catalogul Γ se menţionează, atunci, fiind definit ca un catalog al tuturor cataloagelor care nu se menţionează, el nu se menţionează; în cazul în care catalogul nu se menţionează, atunci, prin definiţie, el se menţionează! Am obţinut paradoxul clasei claselor care nu îşi aparţin ca elemente.

Soluţia este uşoară. Definiţiile cataloagelor G şi Γ sînt (notînd catalog = *Catg*):

$$\mathit{Catg}\ \mathrm{x} \in \mathit{Catg}\ \mathrm{G} =_{\mathrm{Df}} \mathit{Catg}\ \mathrm{x} \in \mathit{Catg}\ \mathrm{x}$$

$$\mathit{Catg}\ \mathrm{x} \in \mathit{Catg}\ \Gamma =_{\mathrm{Df}} \sim \mathit{Catg}\ \mathrm{x} \in \mathit{Catg}\ \mathrm{x}$$

Formulele D_1 şi D_2 ne dau:

$$\mathit{Catg}\ \mathrm{x} \neq \mathit{Catg}\ \mathrm{G}$$

$$\mathit{Catg}\ \mathrm{x} \neq \mathit{Catg}\ \Gamma$$

În consecinţă, variabila *Catg* x nu poate lua valoarea G sau, respectiv, Γ; nu putem pune aceeaşi problemă pentru *Catg* G şi *Catg* Γ, dacă ele se menţionează sau nu; deci paradoxul nu se poate produce. Dacă nu ţinem seama de D_1 şi D_2, atunci obţinem următoarele echivalenţe generale:

$$\mathit{Catg}\ \mathrm{G} \in \mathit{Catg}\ \mathrm{G} \equiv \mathit{Catg}\ \mathrm{G} \in \mathit{Catg}\ \mathrm{G}$$

$$\mathit{Catg}\ \Gamma \in \mathit{Catg}\ \Gamma \equiv \sim \mathit{Catg}\ \Gamma \in \mathit{Catg}\ \Gamma$$

Trebuie să observăm, în primul rînd, că cataloagele G şi Γ nu sînt cataloage obișnuite, ele nu menţionează orice carte, broşură, stampă, manuscris etc., ci, exclusiv cataloage cu o anumită *particularitate* fiecare, *particularitate aleasă în mod arbitrar*. Definiţia catalogului G a cataloagelor care se menţionează şi definiţia catalogului Γ a cataloagelor care nu se menţionează, sînt definiţii făcute prin accident. Faptul de a se menţiona sau a nu se menţiona nu este un element permanent şi propriu conotaţiei noţiunii de catalog, pentru că, dacă ar fi aşa, toate cataloagele ar trebui să se menţioneze sau toate cataloagele ar trebui să nu se menţioneze. Se vede de asemenea că expresiile de forma „*Catg* x $\in$ *Catg* x" sau cu negaţie „$\sim$ *Catg* x $\in$ *Catg* x" pot fi formate, dar ele nu pot fi expresii definisante. Dar atunci, cum sînt formate cataloagele G şi Γ? Ele sînt, practic, formate prin faptul că toţi membrii lor sînt daţi ca posedînd accidentul, sau nu, prin observaţie directă. Colecţiile G şi Γ nu sînt deci formate prin definiţia accidentală respectivă, ci practic, ele sînt realizabile pentru că numărul elementelor lor este finit, dar definiţiile lor sînt definiţii prin accident. Pentru acest motiv, atunci cînd considerăm cataloagele G şi Γ printre cataloagele care au o definiţie, independent de acest accident, ele încetează de a mai fi definite. Simpla întrebare „catalogul G se menţionează sau nu se menţionează?" sau „Catalogul Γ se menţionează sau nu se menţionează?" privează aceste cataloage de accidentul care serveşte la formarea lor, şi ele nu mai sînt definite.

În rezumat, cataloagele G şi Γ pot fi practic constituite pentru că membrii lor pot fi daţi într-un mod concret şi pentru că numărul acestora este finit; chestiunea, dacă aceste cataloage se menţionează sau nu, nu se pune prin înseşi datele problemei; pentru acest motiv putem, practic, să menţionăm în cataloagele G sau Γ chiar aceste cataloage, pentru că menţionarea lor nu are legătură cu definiţiile lor. Nimic nu ne împiedică să înscriem în catalogul Γ, catalogul Γ însuşi, ceea ce ar fi imposibil de realizat în cazul în care definiţia catalogului Γ ar fi contradictorie, aşa cum se întîmplă, de exemplu, dacă vrem să desenăm un cerc pătrat şi nu putem desena nici măcar un punct al acestui cerc.

IX

CONCLUZII

Am formulat soluţia tuturor paradoxelor logico-matematice, urmînd patru căi diferite:

1) demonstrînd formula T ω, bazată pe principiul contradicţiei;

2) întrebuinţînd condiţiile definiţiei, formulate de tautologiile D_1 şi D_2;

3) cu ajutorul primei reguli a silogismului, *terminus esto triplex*;

4) stabilind că noţiunile care dau loc la paradoxe sînt definite prin accident, adică nu sînt definite de loc.

Toate aceste patru căi au dus la acelaşi rezultat, la o soluţie unică. Problema paradoxelor este de natură pur logică (aşa cum a afirmat Russell chiar de la începutul dezbaterilor asupra acestei probleme) şi apariţia lor se datorează unei singure şi aceleiaşi erori de logică, foarte subtilă de altfel, care se comite chiar în enunţul problemei.

Trebuie să remarcăm că, contrar tuturor tentativelor făcute pînă acum de a rezolva aceste antinomii prin reguli prohibitive convenţionale, în ceea ce priveşte admisibilitatea anumitor expresii în interiorul unui formalism logic, soluţia noastră a demonstrat că nu e vorba de nici o limitare, ci numai de respectarea principiilor logice: condiţiile impuse de aceste principii nu înseamnă o limitare, ci valabilitatea universală a formulelor construite prin respectarea lor riguroasă, pentru că aceste principii sînt uni-

versale. Teorema $T\omega$ sau D_1 și D_2, care sînt tautologii, au pus în evidență acest lucru și au explicat natura și justificarea logică a relației $\psi \neq P$, valabilă și în echivalențele generale $(x) \cdot P(x) \equiv \psi(x)$ sau $(x) \cdot P(x) \equiv \sim \psi(x)$, sau în cazurile particulare ale acestora care se obțin pentru $x = \psi$, în speță, $(\psi) \cdot P(\psi) \equiv \psi(\psi)$ și $(\psi) \cdot P(\psi) \equiv \sim \psi(\psi)$.

Am insistat asupra unui fapt deosebit de important: în toate aceste paradoxe au apărut noțiuni definite prin accident, și, în fond, noțiunile acestea au provocat paradoxele. Matematica are posibilitatea să formeze în mod continuu expresii prin accident, ca, de altfel, orice disciplină sau limbaj curent. Sîntem tot timpul obligați să remarcăm legături accidentale între lucruri, care sînt interesante și utile. Orice limbă dată fiind convențională, urmează că orice expresie a unei limbi date, fiind o expresie a unui lucru, este convențională și, în consecință, expresia oricărei idei este făcută cu o definiție prin accident. Matematica întrebuințează deseori asemenea expresii și utilitatea lor este incontestabilă. De exemplu, scrierea zecimală este o scriere convențională. Dar în această scriere este mai ușor să recunoaștem o proprietate esențială a numerelor întregi decît în altă scriere.

De exemplu, se poate spune imediat despre numărul 332 că este un număr par, deci că nu este un număr prim etc. Dar dacă scriem acest număr în alt sistem, de exemplu, avînd baza 7, îl vom scrie 653. De data aceasta, nu mai este atît de ușor să constatăm prin simpla examinare a ultimei sale cifre, că numărul 653 este un număr par, și că deci el nu este număr prim etc. Proprietatea „orice număr întreg care se termină cu o cifră pară este un număr compus" este definită prin accident și depinde de alegerea sistemului de numerație. Dar dacă se enunță această proprietate, fără a se specifica accidentul — sistemul de numerație în care ea este valabilă — ea nu mai este definită, deci nu reprezintă nimic.

Acesta este un exemplu destul de simplu, dar există în matematică propoziții mult mai complicate și mai importante care întrebuințează un accident.

Să luăm o curbă plană, de exemplu, curba numită lemniscată sau elipsa lui Cassini. Ea este definită după cum urmează: locul punctelor, astfel încît produsul distan-

ţelor fiecăruia dintre ele, la două puncte, fixe, este constant.

Putem foarte bine să o studiem din punct de vedere geometric şi să-i stabilim proprietăţile, plecînd direct de la această definiţie; dar putem de asemenea să o studiem din punct de vedere analitic, luînd un sistem de axe de coordonate carteziene, şi atunci ea poate fi reprezentată prin ecuaţia următoare:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Expresia algebrică $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ reprezintă, în mod convenţional, lemniscata; din punct de vedere logic, această definiţie este făcută prin accident şi nu reprezintă nimic geometric, dacă facem abstracţie de sistemul de referinţe, în cazul nostru, „axele de coordonate carteziene".

Propoziţia „axele de coordonate carteziene" este aci accidentul, corespunzînd cu propoziţia „sistemul zecimal de numeraţie" din exemplul precedent. Aceasta apare şi mai evident dacă schimbăm sistemul de referinţă, de exemplu, dacă scriem ecuaţia lemniscatei în sistemul de coordonate polare:

$$r^2 = a^2r^2 \cos A$$

Dacă vorbim în limbajul coordonatelor carteziene, atunci prima ecuaţie este cea care reprezintă lemniscata, dacă vorbim în limbajul coordonatelor polare, a doua ecuaţie este cea care reprezintă această curbă etc. Uneori primul limbaj este mai avantajos, sau, cum spunea Poincaré, mai comod, alteori, cel de-al doilea. E desigur un limbaj convenţional, în sensul pe care-l dădea Poincaré acestui cuvînt, dar trebuie ţinut seama de faptul că, tocmai fiindcă putem întrebuinţa orice limbaj, limbajul coordonatelor şi expresiile respective ale entităţilor matematice în acest limbaj nu sînt esenţial legate de aceste entităţi. Şi aceasta se vede clar chiar din faptul că aceste accidente sînt separabile. Dar s-ar putea oare contesta utilitatea acestor limbaje? În afară de aceasta, dacă putem stabili o corespondenţă biunivocă între toate expresiile unui limbaj matematic şi entităţile studiate în acest limbaj, am stabilit

o posibilitate de a studia o entitate matematică studiind numai expresia ei în acest limbaj. Astfel, demonstrînd că orice curbă plană este reprezentată, în general, printr-o ecuaţie de forma (în coordonate carteziene)

$$y = f(x)$$

şi că, reciproc, orice ecuaţie de forma aceasta reprezintă în coordonate carteziene o curbă plană, este suficient să ni se dea o ecuaţie oarecare, de pildă:

$$y = \frac{x^5 - 5x + 1}{x - 1}$$

pentru a şti că ea reprezintă o curbă plană, care poate fi studiată şi ale cărei elemente remarcabile pot fi găsite fără a o fi definit în prealabil pur geometric.

Acelaşi lucru s-a întîmplat cu ajutorul scrierii zecimale: fără să ne fi gîndit vreodată la un număr, putem să-l scriem, şi simpla sa scriere zecimală determină complet numărul. Să scriem, de exemplu, o suită de cifre, fie 3457891342; această suită de cifre reprezintă în sistemul zecimal un număr despre care nu ne-am gîndit niciodată că ar corespunde acestei scrieri, deoarece între scrierea zecimală şi numere există o corespondenţă biunivocă.

Considerăm că nu este cazul să multiplicăm exemplele pe care le putem găsi la fiecare pas şi în toate domeniile matematicii. Întrebuinţarea expresiilor care utilizează un accident este cu totul îndreptăţită şi utilă. Aceasta însă nu trebuie să ne împiedice să controlăm expresiile pe care le formăm prin accident, pentru că uneori se întîmplă să gîndim un lucru pentru care nu cunoaştem decît un accident, şi asta înseamnă că nu gîndim nimic!

Noţiunea de curbă, în general, este gîndită şi definită independent de orice sistem de coordonate şi tocmai de aceea este posibil să stabilim o corespondenţă biunivocă între orice curbă şi ecuaţia sa; noţiunea de număr este gîndită şi definită independent de orice sistem de numeraţie şi tocmai de aceea putem stabili o corespondenţă biunivocă între orice număr şi scrierea sa într-un sistem de numeraţie dat etc. Dar dacă am spune „curba reprezentată de ecuaţia dată $y = f(x)$”, fără a se specifica sistemul de

coordonate, sau fără măcar a-l subînțelege, atunci curba nu este definită.

Vedem că, chiar în cazurile foarte precise și riguros definite, definițiile încetează de a mai exista dacă nu ținem seama de accident, și nu rămînem decît cu accidentul ca element definisant, adică definiția dispare. Aceasta se întîmplă mai ales în cazurile îndoielnice, cum ar fi paradoxele. Și aci se definește, în mod convențional, un cadru — sistemul de coordonate respectiv —, de exemplu, corespondența biunivocă a claselor din paradoxul claselor *incompatibile* (sau al claselor care nu își aparțin ca element); apoi se iese din cadru cu o expresie formată în acest cadru și care, în momentul respectiv, nu mai este definită. Așa că nu e de mirare că nu putem stabili dacă clasa formată în acest fel are sau nu proprietatea accidentală care a servit la propria sa definiție. *Dar, pentru a putea constata proprietățile accidentale, trebuie ca lucrul la al cărui accident ne gîndim să fie dat sau gîndit în alt mod decît prin accidentul său.*

Același lucru s-a întîmplat în teoria mulțimilor: matematicienii au crezut că gîndesc lucruri definite numai printr-un accident, deci nu au gîndit nimic!

În această lucrare nu ne-am ocupat în mod special de teoria mulțimilor, pentru că am examinat problema antinomiilor logico-matematice din punct de vedere pur logic. Dar trebuie să remarcăm o eroare, ca să zicem așa, de metodă, care a fost fundamentală pentru întreaga orientare a cercetărilor în acest domeniu. Puși în prezența dificultăților provocate de paradoxe, în loc să caute soluția logică a acestor contradicții, matematicienii s-au servit de metoda axiomatică pentru a elimina raționamentele care duc la antinomii.

Teoria mulțimilor s-a dovedit a fi utilă și fecundă în ceea ce privește fundamentele matematicii. Dar, încă de la apariția acestei teorii, care este considerată, în general, ca o creație a lui Georg Cantor, matematicienii au fost neplăcut impresionați de raționamentele cantoriene, fapt care a provocat un fel de neîncredere în legătură cu această teorie, mai ales în ceea ce privește jocul logic cu infinitul, dar nimeni nu a putut descoperi defectul acestor raționamente. Apariția antinomiilor a demonstrat în mod definitiv că

există un viciu în teoria mulţimilor, viciu care a fost atribuit ulterior logicii, în general. Pentru a putea separa raţionamentele vicioase de cele care erau corecte, s-a recurs la metoda axiomatică, după cum am mai menţionat, şi astfel s-au născut sistemele axiomatice ale teoriei mulţimilor.

Este evident acum că neîncrederea anumitor matematicieni privitoare la raţionamentele cantoriene era bine justificată, pentru că aceste raţionamente, care şocau bunulsimţ, erau bazate pe noţiuni definite de accidente şi erau cu adevărat vicioase. Cu toate că putem, în mod legitim, să luăm în consideraţie proprietăţile accidentale ale mulţimilor, trebuie să ţinem seama că asemenea accidente nu pot caracteriza o mulţime, că accidentul nu este definisant şi că, dacă socotim o astfel de mulţime ca definită, ea nu este de loc definită.

Trebuie deci să controlăm definiţiile numerelor cardinale sau ordinale, ca şi alte noţiuni introduse ulterior în teoria mulţimilor, pentru a determina cu precizie definiţiile construite prin accident. Nu avem intenţia să întreprindem aici această cercetare, care ar fi, în fond, o epurare a teoriei mulţimilor. Ne vom mulţumi să dăm cîteva exemple ca aplicare a rezultatelor stabilite în lucrarea de faţă.

Să începem cu un exemplu simplu. Definiţia logistică a *clasei* este următoarea, aşa cum a fost enunţată de Russell în *Principia Mathematica* sau de Carnap în *Abriss der Logistik*: fiind dată o funcţie $\varphi(z)$, o clasă înseamnă „valorile lui z care satisfac $\varphi(z)$, şi ea se notează simbolic prin $\hat{z}(\varphi z)$. Găsim apoi următoarea definiţie a apartenenţei: „x este unul din aceia pentru care funcţia $\varphi(z)$ este valabilă" care nu înseamnă altceva decît că „x satisface funcţia propoziţională $\varphi(z)$." În simboluri, Russell, Carnap şi ceilalţi logisticieni scriu această definiţie astfel:

$$x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \varphi(x)$$

Avem aici o „definiţie" ; dar este ea într-adevăr o definiţie? Conform lui D_1, pentru a nu avea o definiţie *idem per idem*, trebuie ca termenul definisant să nu intre în ex-

presia termenului definit. Dar primul membru al acestei definiţii spune „x aparţine celor care satisfac funcţia $\varphi(z)$" *(definiendum)*; al doilea termen al acestei definiţii spune „x satisface funcţia $\varphi(z)$" *(definiens)*. Avem deci aici o definiţie *idem per idem*, o identitate, şi, ca identitate, ea este adevărată, dar, ca definiţie, ea este falsă, tocmai pentru că este o identitate. În exemplul de mai sus există două feluri de a scrie acelaşi lucru. Ceea ce, de altfel, este evident: într-o noţiune generală, distingem extensiunea sa şi conţinutul său (de notaţie şi conotaţie). Ele sînt două elemente care aparţin noţiunii generale de concept, deci noţiunea generală nu poate fi definisantă pentru conceptul de clasă şi nici conţinutul conceptului nu poate fi definisant pentru extensiunea conceptului.

Să presupunem că enunţăm definiţia următoare: „dacă x aparţine clasei $\hat{z}(\varphi z)$" înseamnă „x satisface funcţia $\psi(z)$". Aceasta se scrie în simboluri:

$$\vdash \cdot x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \psi(x)$$

Să adăugăm acum D_1, cu simbolurile întrebuinţate aici:

$$\vdash : x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \psi(x) \cdot \supset \cdot \psi \neq \varphi$$

De unde, printr-un *modus ponens*:

$$\vdash \cdot \psi \neq \varphi$$

Ceea ce se poate scrie şi în termeni de clase:

$$\vdash \cdot z(\psi\hat{z}) \neq \hat{z}\,(\varphi z)$$

Se vede deci că, în definiţia precedentă, $\psi(x)$ nu poate fi niciodată identic cu $\varphi(x)$, iar definiţia dată de Russell, Carnap etc.:

$$x \in \hat{z}(\varphi z) =_{Df} \varphi(z)$$

nu poate fi scrisă, nefiind o definiţie, ci o identitate.

Nu este de mirare că, în acest caz, se pot trage chiar concluzii corecte plecînd de la această expresie, pentru că, în raționamentele respective, ea nu are decît numele de definiție, dar funcționează, în mod subreptice, ca identitate. Ceea ce ar fi trebuit să-i frapeze pe logicieni este faptul surprinzător că orice rezultat dedus direct din această expresie este, întotdeauna, o identitate și nimic mai mult. Însă este evident că nu se poate obține o identitate decît din rezultate care sînt, și ele, identități. Faptul se poate verifica, examinînd rezultatele bazate pe această expresie și obținute de Russell în *Principia Mathematica*.

Să trecem la un al doilea exemplu, la definiția numerelor naturale. Chiar de la început, ideea de a defini numărul cardinal prin clase de similitudine (mulțimile de aceeași putere ale teoriei mulțimilor) apare riscată, din punct de vedere logic.

Iată cum explică Russell [4] această definiție. Să introducem noțiunea de similitudine a claselor: două clase se numesc asemănătoare dacă se poate stabili între membrii lor o corespondență biunivocă. Deci, se va face mai întîi o clasă cu clasa care nu conține nici un membru; ea va fi numărul 0. Apoi se va forma o clasă cu toate clasele care nu conțin decît un termen: această clasă a claselor va fi numărul 1. Pe urmă, pentru numărul 2, se vor grupa toate cuplurile; apoi, toate triourile și așa mai departe. Russell ajunge, în felul acesta, la definiția numărului: „*Numărul* unei clase este clasa tuturor claselor care îi sînt asemănătoare". Sau: „Putem defini acum numerele, în general, ca unul oricare dintre grupuri în interiorul cărora similitudinea adună clasele" ([4], p. 31).

Ciudățenia unei astfel de definiții nu i-a scăpat lui Russell care a remarcat-o, afirmînd totuși: „că o preferă entității metafizice 2". Și noi am putea să o preferăm, cu o singură condiție: să reprezinte în mod real ceva. Într-adevăr, să examinăm, mai îndeaproape, definiția numărului. Ea este o definiție *idem per idem*. Chiar Russell face observația că această definiție se reduce, în fond, la expresia: „*Un număr este ceea ce reprezintă numărul unei clase*". Dar el crede că cercul vicios al acestei definiții nu este decît aparent. „Definițiile de acest fel — scrie el — sînt, de altfel, foarte frecvente. Clasa taților, de exemplu,

ar trebui definită definind mai întîi ce înseamnă a fi tatăl cuiva; atunci clasa taţilor va fi clasa care cuprinde pe toţi aceia care sînt taţii cuiva". Dar Russell face o greşeală, pe care am depistat-o mai sus, vrînd să definească clasa taţilor prin noţiunea de tată; însă *„clasa taţilor este extensiunea predicatului „tată"*, iar Russell vrea să definească o nouă clasă, a tuturor taţilor, prin clasa tuturor taţilor, ceea ce este o definiţie *idem per idem*, în care nu se defineşte nimic.

Am citat în mod expres acest exemplu, dat de Russell însuşi, pentru a sublinia că s-a creat atît de mult obişnuinţa de a pune problema în acest fel încît încurcătura persistă chiar în problemele elementare. Regăsim acelaşi procedeu în definiţia numărului cardinal. Bunul-simţ constată, chiar de la început, că în definiţia dată de Frege-Russell, noţiunea de număr presupune noţiunea de număr, că, de exemplu, definiţia numărului 2 presupune numărul 2 etc., că ea este o definiţie *idem per idem*, chiar dacă se complică această definiţie, ajungîndu-se la un fel de dialelă. „Un număr cardinal nu este altceva — scrie Russell — decît un grup de lucruri asemănătoare între ele şi nesemănînd cu nimic altceva decît unul cu celălalt". Aceasta înseamnă: să luăm o clasă şi să-i construim o imagine abstractă, adică făcînd abstracţie de toate determinările membrilor săi; să adunăm apoi toate clasele care au aceeaşi imagine abstractă (acelaşi număr de elemente) şi obţinem astfel clasa tuturor claselor asemănătoare. Această definiţie vrea deci să spună: să luăm o clasă oarecare şi să repetăm în mod nedefinit imaginea sa abstractă (numărul său) şi vom forma o nouă clasă, clasa tuturor claselor asemănătoare! Dar o clasă, chiar repetată la infinit, nu poate defini nici o altă clasă, după cum am văzut, şi definiţia pe care încearcă să o formeze o astfel de clasă, este o definiţie *idem per idem*. Formulele D_1 şi D_2 au arătat că asemenea definiţii sînt false definiţii.

Acest lucru reiese direct, dacă scriem definiţia logistică a numărului cardinal. Să notăm, ca în *Principia Mathematica*, cu $Nc^{c}\alpha$, numărul cardinal al clasei α, adică, în termeni logistici, $Nc^{c}\alpha$ este clasa claselor asemănătoare; să notăm relaţia de similitudine cu Sm şi $\overrightarrow{Sm^{c}\alpha}$ va însemna,

în acest caz, clasa „tuturor acelora care au relaţia de similitudine cu α". În acest caz, definiţia numărului cardinal este:

$$Nc^c\alpha =_{Df} \overrightarrow{Sm^c\alpha}$$

„Numărul cardinal al clasei α este clasa tuturor claselor care au relaţia de similitudine cu α". Dar, după cum însuşi Russell afirmă, „toate clasele care au relaţia de similitudine cu α nu sînt definite prin nimic altceva decît prin faptul că sînt asemănătoare cu α"; deci termenul *definiens* este format aici de o clasă α şi de relaţia Sm pe care ea o are cu imaginea sa numerică, întrucît nici o altă clasă nu e definită. Dar orice clasă are relaţia Sm cu ea însăşi, prin definiţia clasei. Deci nu avem aici decît o clasă, care trebuie să fie dată prin definiţia sa, şi relaţia Sm care rezultă pentru orice clasă, din definiţia generală a noţiunii de clasă. Deci, termenul *definiens* nu este un termen definisant după cum ştim, şi $Nc^c\alpha$ nu este definit.

Vedem deci mecanismul acestei definiţii: se construieşte imaginea abstractă (numărul) unei clase α şi apoi se dau clasele de similitudine ale acestei clase α numai prin imaginea abstractă a clasei α (numărul său), adică clasele de similitudine nu sînt date decît de imaginea abstractă a clasei. Este vorba, într-adevăr, de o definiţie *idem per idem* de specia a doua, aceea care se numeşte *dialelă*.

Un al treilea şi ultim exemplu va fi faimoasa teoremă a lui Cantor: *Puterea mulţimii (numărul cardinal) tuturor submulţimilor unei mulţimi oarecare este superioară puterii (numărului cardinal) acestei mulţimi*. Conform acestei teoreme, nu va exista deci — după cum subliniază Fraenkel [3] — o mulţime (sau o clasă) absolut universală, deoarece mulţimea submulţimilor ar fi şi mai extensivă. Această teoremă i-a permis lui Cantor să definească mulţimile infinite din ce în ce mai extensive, adică din ce în ce mai puternice, care formează seria numerelor cardinale transfinite, seria Aleph-ilor.

Nu mai este nevoie să examinăm demonstraţia acestei teoreme pentru a descoperi eroarea. Chiar definiţiile care intră în enunţul acestei teoreme sînt vicioase.

O submulţime a unei mulţimi oarecare nu este definită, ca submulţime decît în funcţie de mulţimea dată ; submulţimea T a mulţimii M nu are o definiţie independentă de mulţimea M şi definiţia sa presupune dinainte definiţia lui M. Nu există submulţimi în sine, nu există decît mulţimi. În consecinţă, expresia prin care se distinge o relaţie între o mulţime şi părţile ei nu este definisantă după cum am mai văzut, căci relaţia pe care o are o mulţime cu ea însăşi, ca rezultat al propriei sale definiţii, nu este definisantă. Acest lucru este evident prin faptul că printre submulţimile unei mulţimi M se găseşte însăşi mulţimea M ; cu alte cuvinte, natura logică a raportului submulţimilor unei mulţimi M cu mulţimea M este aceeaşi cu cea a raportului mulţimii M cu ea însăşi.

Submulţimile unei mulţimi M nu sînt definite prin definiţia însăşi a mulţimii M ; ele nu derivă direct şi analitic din această definiţie.

Fiind dată noţiunea de mulţime, în general, nu rezultă din această definiţie că o mulţime are submulţimi, care ar fi determinate, în consecinţă, în fiecare caz, prin definiţia însăşi a mulţimii date. Astfel deci, submulţimile unei mulţimi M, în calitate de submulţimi, sînt formate prin accident şi mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii M este definită prin accident, adică nu este definită de loc.

O submulţime poate avea o definiţie propriu-zisă, ca mulţime, dar ca submulţime nu este definită decît prin accident. Trebuie să observăm, şi aici, că este îndreptăţit să se formeze prin accident submulţimile mulţimii M ; eroarea rezidă în faptul că vrem să definim o nouă mulţime cu aceste elemente (submulţimile lui M), definite prin accident ca submulţimi ale lui M, şi atunci nu se mai defineşte nimic. Practic chiar, colecţia submulţimilor nu poate fi formată decît dacă ele sînt, toate, date, şi aceasta presupune că numărul lor este finit (cap. VI, 4).

Această concluzie apare şi mai clar, dacă folosim notaţii logistice. Se notează clasa subclaselor unei clase α prin $Cl^c\alpha$ (mulţimea puterilor din teoria mulţimilor) ; printre subclasele lui α se găsesc clasa α însăşi şi clasele vide.

Găsim în *Principia Mathematica*, sau în *Abriss der Logistik* a lui Carnap, definiţia următoare:

$$Cl^c\alpha =_{Df} \hat{\beta}(\beta \subset \alpha) \qquad (1)$$

„Clasa tuturor sub-claselor lui α" este definită ca fiind „toate clasele care verifică funcţia propoziţională $\beta \subset \alpha$ (adică, care sînt incluse în clasa α). Dar clasa β nu este definită ca sub-clasă a lui α decît prin definiţia lui α; deci β presupune clasa α şi funcţia $\beta \subset \alpha$ nu este definisantă. Avem aici un exemplu de definiţie *idem per idem*, de a doua speţă, numită dialelă: clasa $Cl^c\alpha$ a tuturor subclaselor lui α este definită de clasă α şi de clasele β, definite ca sub-clase ale lui α de clasa α!

Să presupunem, în general, că se formează o clasă G, luînd toate clasele β care au o relaţie R cu o clasă dată α.

Avem, prin definiţie:

$$G =_{Df} \hat{\beta}(\beta R \alpha)$$

După cum am demonstrat, pentru ca expresia $\beta R \alpha$ să fie definisantă, trebuie ca β să nu fie niciodată identic cu α, şi nici ca definiţia sa să presupună pe α. Acest lucru este enunţat de D_1:

$$\vdash : G =_{Df} \hat{\beta}(\beta R \alpha) \cdot \supset \cdot \beta \neq \alpha$$

Definiţia (1) nu este o definiţie propriu-zisă, ci o identitate fiindcă β poate fi identic cu α ; ea exprimă acelaşi lucru, în două feluri deosebite: „dacă β este inclus în α, numim clasa β o sub-clasă a lui α".

Egalitatea precedentă nu stabileşte o proprietate a lui β, ci, pur şi simplu, ea dă un nume lui β, prin faptul că are relaţia de incluziune cu α.

Avem deci o abreviere, adică numele de submulţime, dat lui β este definit prin accident, după cum ştim, şi nu este o proprietate a lui β care ar decurge pentru ea din faptul că are relaţia de incluziune cu α. În consecinţă, noţiunea de submulţime, fiind definită prin accident, nu are puterea logică de a defini o nouă clasă $Cl^c\alpha$, aceea a subclaselor lui α. Axioma lui Zermelo, „a mulţimii submulţimilor"

prin care el pune, în mod axiomatic, existenţa unei asemenea mulţimi, este falsă pentru aceleaşi motive şi consecinţele deduse cu ajutorul acestei axiome sînt iluzorii.

Este deci evident că formarea, prin simplă definiţie, a mulţimii tuturor submulţimilor unei mulţimi date este iluzorie, şi că, printr-o asemenea definiţie, nu definim nimic. Teorema lui Cantor nu există şi definiţiile numerelor transfinite care formează seria Aleph-ilor sînt definiţii prin accident, deci ele nu definesc, în realitate, nimic.

Ne vom opri aici cu analiza consecinţelor la care ne duce soluţia paradoxelor logico-matematice. Importanţa acestor consecinţe va fi apreciată de cititorul nostru.

În general, putem crede că s-au definit probleme cu totul iluzorii şi care nu sînt nicidecum definite. Soluţia paradoxelor a constat, în fond, în reducerea paradoxelor la probleme inexistente, care nu se pun pentru că, punîndu-le, se anulează înseşi definiţiile care urmau să le servească drept fundament. Scoateţi-l pe mincinos din poziţia sa relativă faţă de adevăr şi fals şi puneţi-l să fie mincinos în sine şi cu aceasta aţi anulat definiţia sa: el nu mai are premisele minciunii. Scoateţi clasa claselor incompatibile din definiţia accidentală care a creat-o şi examinaţi-o în mod independent, ca pe o clasă bine definită: ea încetează de a mai fi definită. Scoateţi toate submulţimile care pot fi formate cu elementele unei mulţimi α şi consideraţi-le ca formînd o nouă mulţime, independentă faţă de mulţimea α: mulţimea tuturor submulţimilor lui α nu este definită etc.

S-ar părea, în acest fel, că cele mai mari greutăţi întîmpinate de inteligenţa omenească nu sînt acelea ale problemelor insolubile, ci acelea ale problemelor inexistente. Este acesta cazul tuturor marilor dificultăţi? Wittgenstein ([1] 4. 003) a afirmat, în general:

„Şi nu este de mirare că problemele [*logice*] *cele mai profunde nu sînt, în realitate, probleme".*

INDEXUL LUCRĂRILOR CITATE

Ackermann, W., [1] *Ein System der typenfreien Logik I* în *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften,* Hirzel, Leipzig, 1941.

Aristotel, [1] *Organon,* trad. franc. J. Tricot; Ed. J. Vrin, Paris, 1936.

Bain, Alex., [1] *Logique déductive et inductive,* 2 vol., trad. franc. G. Compayré; Alcan, Paris, 1894.

Becher, Albr., [1] *Bestreitet Aristoteles die Gültigkeit des „Tertium non datur" für Zukunftaussagen,* Actes du Congrès intern. de phil. scient. VI; Hermann, Paris, 1936.

Behmann, H., [1] *Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre,* Jahresbericht der deutschen Math. Ver. Bd. 40, 1931.

Beth, W. E., [1] *Les fondements logiques des mathématiques,* II-ème éd.; Gauthier-Villars, Paris, 1955.

Bochenski, J. M., [1] *Ancient formal Logic,* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1951.

Bocivar, D. A., [1] *To the Question of Paradoxes of the Mathematical Logic and Theory of Sets,* Moscow, 1943.

Brouwer, L. F. J., [1] *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Math. insb. in der Funcktionentheorie,* Journ. für die reine und angewandte Math., B. 154, 1924.

Brunschwicg, L., [1] *Les étapes de la philosophie mathématique,* II-ème éd., Alcan, Paris, 1922.

Burbaki, N., [1] *Théorie des ensembles,* Hermann, Paris, 1954.

Burali-Forti, C., [1] *Una questione sui numeri transfiniti,* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, vol. XI, 1897.

Cantor, G., [1] *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalt,* edit. de E. Zermelo; Springer, Berlin, 1932.

Carnap, R., [1] *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien, 1934.
[2] *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, Bd. II, 1931.
[3] *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*, „Monatshefte f. Math. u. Physik", Bd. 41, 1934.

Church, A., [1] *A Set of Postulates for the Foundation of Logic I*, Ann. of Math., Princeton Univ. Press, vol. 33, 1932; II, *idem*, vol. 21, 1935.
[2] *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton Univ. Press, 1956.

Chwistek, L., [1] *Über die Antinomien der Principien der Mathematik*, în „Math. Zeitschrift", Bd. 14, 1922.

Couturat, L., [1] *Les principes des mathématiques*, Alcan, Paris, 1905.
[2] *La logique et la philosophie contemporaine*, „Revue de Métaphysique et de Morale", 1906.

Destouches, J.-L., [1] *Essai sur la forme générale des théories physiques*, Ed., „Ardealul", Cluj, 1938.

Dingler, H., [1] *Philosophie der Logik und Arithmetik*, Reinhardt, München, 1931.

Dubislav, W., [1] *Die Definition*, Junker, Berlin, 1933.

Dumitriu, A., [1] *Paradoxele logice*, Biblioteca filozofică, Ed. Fundațiilor pentru artă și literatură, București, 1944.

Février, Paulette [1] *Les relations d'incertitude d'Heisenberg et la logique*, (Travaux du IX-ème Congrès de Phil., VI; Hermann, Paris, 1937).

Fraenkel, A., [1] *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin, 1928.
[2] *Die heutigen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, Bd. I, 1930.
[3] *Le problème des antinomies et ses développements récents*, „Revue de Métaphysique et de Morale", 1939. (Coautor *J. Bar—Hillel*).
[4] *Abstract Set Theory*, Second completely revised Edition, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
[5] *Foundations of Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958. (Coautor *J. Bar—Hillel*).

Frege, G., [1] *Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle, 1879.
[2] *Die Grundgesetze der Arithmetik*, Pohle, Jena, vol. I, 1893; vol. II, 1903.

Gödel, K., [1] *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* „Monatshefte f. Math. u. Physik", Bd. 37, 1931.

Gonseth, F., [1] *Les fondements des mathématiques*, Blanchard, Paris, 1926.

Grelling, K. und Nelson, L., [1] *Bemerkungen zu den Paradoxen von Russell und Burali-Forti*, Abhandlungen der Friesschen Schule, 1906.

Grelling, K., [2] *Der Einfluss der Antinomien auf die Entwicklung der Logik im 20. Jahrhundert*, Travaux du IX-ème Congrès inter. de phil. VI, Hermann, Paris, 1937.

Hao, Wang, et McNaughton, Robert, [1] *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*, Ed. Gauthier—Villars, Paris, 1953.

Härlen, H., [1] *Sur la paradoxie logique dans la théorie des ensembles*, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, tome 187, Paris, 1927.

[2] *Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre*, în „Jahresbericht der deutschen math. Verl.'', Bd. 39, 1930.

Heyting, A., [1] *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Berichte der Akad. Berlin, 1930.

[2] *Die intuitionistiche Grundlegung der Mathematik*. Erkenntnis, Bd. II, 1931.

[3] *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus-Beweistheorie*, Springer, Berlin, 1934.

Hilbert, D., und Bernays, P., [1] *Grundlagen der Mathematik*, Springer, Berlin, vol. I, 1934; vol. II, 1939.

Kant, Im., [1] *Logik*, ed. III, Meiner, Leipzig, 1930.

König, J., [1] *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem*, Math. Annalen, Bd. 61, 1905.

Lewis, G. J., [1] *A Survey of Symbolic Logic*, Univ. of California Press, Berkeley, 1918.

Lukasiewicz, J., [1] *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, Comptes Rendus de la Soc. des Sciences et Lettres 23, Varsovie, 1930.

[2] *Die Logik und das Grundlagen Problem*, Les Entretiens de Zürich, publiés par Gonseth F., Leemann, Zürich, 1941.

Mirimanoff, D., [1] *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti*, L'enseignements math., Tome 19, 1917.

[2] *Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes*, Idem, 1917.

Moch, François, [1] *La logique des attitudes*, „Dialectica", vol. 10, nr. 3, Zürich, 1956.

Moisil, Gr. C., [1] *Logique Modale*, Disquisitiones math. et phys., t. II, București, 1942.

Mostowski, A., [1] *The Present State of Investigations of the Foundations of Mathematics*, Polska Akademie Nauk — Varșovia, 1955.

N e u m a n n, J. v o n, [1] *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre,* „Journal f. d. reine u. angewandte Math.", Bd. 154, 1925.

[2] *Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre,* „Journal f. d. reine u. angewandte Math.", Bd. 160, 1929.

[3] *Die formalistische Grundlegung der Mathematik,* Erkenntnis Bd. 2, 1931.

N i c o d, J., [1] *A reduction in the number of the primitive propositions of logic,* Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 1917.

P e a n o , G., [1] *Les définitions mathématiques,* Bibliothèque du Congrès Intern. Phil., vol. III, 1901.

P e r e l m a n, C h., [1] *L'équivalence, la définition et la solution du paradoxe de Russell,* L'Enseignement math., vol. 36, 1937.

[2] *Une solution des paradoxes de la logique et ses conséquences pour la conception de l'infini,* Travaux du IX-ème Congrès de Phil., vol. VI; Hermann, Paris, 1937.

[3] *Comunicare prezentată de M. Barzin la „Entretiens de Zürich",* Les „Entretiens de Zürich", Leemann, Zürich, 1941.

P e s l o ü a n, L. D e, [1] *Les systèmes logiques et la logistique,* M. Rivière, Paris, 1909.

P o i n c a r é , H., [1] *Science et méthode,* Flammarion, Paris, 1908.

[2] *Dernières pensées,* Flammarion, Paris, 1913.

P r a n t l, C., [1] *Geschichte der Logik im Abendlande,* Ed. nouă, 4 vol., G. Fock, Leipzig, 1927.

R e y m o n d, A., [1] *Les principes de la logique et la critique contemporaine,* Boivin, Paris, 1932.

Q u i n e, W. V., [1] *A System of Logistic,* Cambridge, Massachussets, 1934.

[2] *Set Theoretic for Foundation to Logic,* în „Journal of Symbolic Logic", vol. 1, 1936.

[3] *Mathematical Logic,* Cambridge, Massachussets, I-a ed., 1940, a 2-a ed. 1951.

R a m s e y, F. P., [1] *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays,* Kegan Paul, Londra, 1931.

R e i c h e n b a c h, H., [1] *Elements of Symbolic Logic,* Macmillan Co, New York, 1948.

R i c h a r d, J., [1] *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles* „Revue générale des sciences pures et appliquées," vol. 16, 1905.

Russell, B., and Whitehead, A., [1] *Principia Mathematica*, Cambridge University Press; 1-a ed., vol. 1, 1910, vol. II, 1912, vol. III, 1913; 2-a ed. vol. I, 1925, vol. II şi III, 1927.

Russell, B., [1] *The Principles of Mathematics*, Cambridge Univ. Press, 1903.

[2] *Les paradoxes de la logiques*, „Revue de Métaphysique et de Morale", 1910.

[3] *La théorie des types logiques*, în „Revue de metaphysique et de morale," 1910.

[4] *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. franc., Payot, Paris, 1928.

Sierpinski, W., [1] *Cardinal and ordinal numbers*, (Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.

Skolem, Th., [1] *Logisch—Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze*, „Vidensk, Skr Kristiania, nr. 4, 1920.

Tarski, A., [1] *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, „Studia philosophica", Leopoli, 1935.

Van der Waerden, L. B., [1] *Moderne Algebra*, ed. a III-a, Springer, Berlin, 1950.

Winter, Max, [1] *La méthode dans la philosophie mathématique*, Alcan, Paris, 1911.

Wittgenstein, L., [1] *Tractatus logico-philosophicus*, Paul Kegan, Londra, 1922; versiune paralelă germană şi engleză cu o introducere de B. Russell.

Zawirski, Z., [1] *Les logiques nouvelles et le champ de leurs applications*, în „Revue de métaphysique et de morale", 1932.

[2] *Über die Anwendung der mehrwertigen Logik in der empirischen Wissenschaft* în *Das Kausalproblem* II. Intern. Kongress f. Einheit der Wiss., Kopenhagen, 1936, Meiner, Leipzig, 1937.

Zaremba, Şt., [1] *La logiques des mathématiques*, în „Mémorial des Sciences Math.", XV, Paris, 1926.

Zermelo, E., [1] *Beweis das jede Menge wohlgeordnet werden kann*, „Math. Annalen", Bd. 59, 1904.

[2] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, în „Math. Annalen", Bd. 65, 1908.

TABLA DE MATERII

Redactor resp. de carte: LADISLAU REDLINGHER
Tehnoredactor: Ana Sabău

Dat la cules 12.08.1966. Bun de tipar 15.12.1966. Tiraj 3000+125 ex. Hîrtie scris II A 63 g/m². Format 54×84/16. Coli editoriale 10,39. Coli tipar 13. A. 11 034. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari 16, pentru bibliotecile mici 16.

Tiparul executat sub comanda nr. 603/1966 la Întreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7, Cluj — Republica Socialistă România

